**مبرهنة:** اذا كان $\vec{g}$ تابع شعاعي طويلته ثابتة عندها $\vec{g} \perp \vec{g}'$

$$\forall t \in w \quad |\vec{g}(t)| = a \longleftarrow \text{ثابت}$$

$$|\vec{g}|^2 = a^2 \Longrightarrow \vec{g}\cdot\vec{g} = a^2 \Rightarrow 2\vec{g}\cdot\vec{g}' = 0$$

$$\Rightarrow \vec{g} \perp \vec{g}'$$

- شعاع واحدة الناظم الأساسي:

ليكن $\vec{f}$ تابع شعاعي أملس قابل للاشتقاق مرتين عندها

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

**ملاحظة:** كون $\vec{T}$ شعاع واحدة عندها $\vec{T} \perp \vec{N}$

**مثال:**

$$f(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{2\pi}t)$$

$$\vec{T}(t) = (-\frac{1}{\alpha}\sin t, \frac{1}{\alpha}\cos t, \frac{1}{\alpha 2\pi})$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

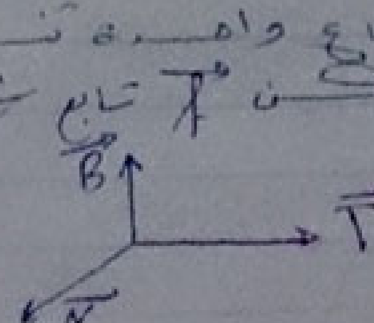
$$\vec{T}'(t) = (-\frac{1}{\alpha}\cos t, -\frac{1}{\alpha}\sin t, 0)$$

$$\vec{N}(t) = \frac{(-\frac{1}{\alpha}\cos t, -\frac{1}{\alpha}\sin t, 0)}{\frac{1}{\alpha}} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

شعاع واحدة ثنائي الناظم.

ليكن $\vec{f}$ تابع شعاعي أملس قابل للاشتقاق مرتين عندها

$$\vec{B}(t) = \vec{T} \wedge \vec{N}$$




**مثال:**

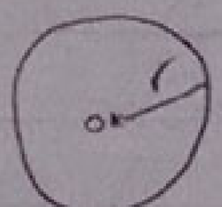
$$f(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{2\pi}t)$$

$$\vec{T}(t) = (-\frac{1}{\alpha}\sin t, \frac{1}{\alpha}\cos t, \frac{1}{\alpha 2\pi})$$

$$\vec{B}(t)=\vec{T}\wedge\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{1}{\alpha}\sin t & \frac{1}{\alpha}\cos t & \frac{1}{2a\alpha}\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}\Longrightarrow$$

$$\vec{B}=\left(\frac{\sin t}{2a\alpha},-\frac{\cos t}{2a\alpha},\frac{1}{\alpha}\right).$$

تمرين :
مثل دائرة



$$\vec{f}:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$t\longmapsto(r\cos t,r\sin t).$$

$$\cos t=\left(\frac{x}{r}\right)^2,\quad\sin t=\left(\frac{y}{r}\right)$$
$$\Rightarrow\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1$$

1: أحسب $\vec{T}$

2: " $\vec{N}$ ، " $\vec{B}$ 3: أحسب طول المنحنى من 0 إلى $t$

4: أحسب محيط الدائرة الممثلة في $f$.

5: أحسب $T$ بدلالة $S$ ، أحسب شعاع المماس بدلالة $S$.

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{f}'(t)}{|\vec{f}'(t)|}$$

$$\vec{f}'(t)=[-r\sin t,r\cos t]\;;\;|\vec{f}'(t)|=\sqrt{r^2}=r$$

$$\vec{T}(t)=\frac{-r\sin t,r\cos t}{r},\quad\vec{T}(t)=[-\sin t,\cos t]$$

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}:\vec{T}'(t)=(-\cos t,-\sin t)$$

$$|\vec{T}'(t)|=1$$

$$\Rightarrow\vec{N}(t)=[-\cos t,-\sin t]$$

$$\vec{B}(t)=\vec{T}\wedge\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\sin t & \cos t & 0\\ -\cos t & -\sin t & 0\end{vmatrix}=(0,0,1)$$

المحاضرة الثالثة عشرة ٢٠/٤/٢٠١٤

$$\vec{S}(t) = \int_0^t |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \int_0^t r \cdot dt = r.t$$

$$\text{المحيط} = 2\pi r$$

بتغير المتحول:

$$S = rt \Longrightarrow t = \frac{S}{r}$$

$$\vec{r}(s) = \left(r\cos\frac{S}{r},\ r\sin\frac{S}{r}\right)$$

$$\vec{T}(s) = \vec{r}\,'(s) = \left(-\sin\frac{S}{r},\ \cos\frac{S}{r}\right)$$

---

المحاضرة الثالثة عشرة ٢٠/٤/٢٠١٤

تمارين ((دساتير فرينيه))

1) $$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \vec{N}\,|\vec{T}'|\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

$$= \vec{N}\,|\vec{T}'(t)|\,\frac{1}{S'(t)} = \vec{N}\,\frac{|\vec{T}'|}{S'}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{T}'|}{S'}$$

نذكر:
حيث $\rho$ نصف قطر التقوس
و المطلوب هو التقوس.

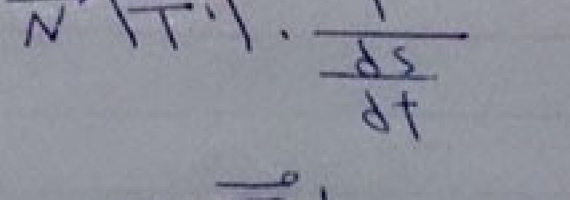
اذاً

دساتير فرينيه الاول $\boxed{\frac{d\vec{T}}{dS} = \frac{\vec{N}}{\rho}}$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{T}'|}{S'}$$

ان $\rho > 0$.
- البسط موجب
- المقام موجب لأن

$$S' = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$




ان $\Delta S > 0$ لما $\Delta t > 0$
و $\Delta S < 0$ لما $\Delta t < 0$
$\Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t}$ مقدار موجب.

ومنه $\frac{1}{\rho} > 0 \Rightarrow \rho > 0$ وكذلك $\frac{\Delta t}{\Delta S}$ موجب