القسم: الرياضيات ...... **السنة:** الثانية .. **المحاضرة:** الثامنة عشرة ..

المادة: معادلات تفاضلية (2) **التاريخ:** 13 / 5 / 2014 **الدكتورة:** ملك جابر بكي ...

(1) أوجد السطح التكاملي للمعادلة :

$$yz\,p - xz\,q = e^{z}$$

الحل: نأخذ الجملة المساعدة

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz} = \frac{dz}{e^{z}}$$
$$(1) \qquad (2) \qquad (3)$$

من النسبتين (1) و (2)

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{-xz}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \Rightarrow -x\,dx = y\,dy$$

$$\Rightarrow x\,dx + y\,dy = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = c_1$$

من النسبتين (1) و (3)

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dz}{e^{z}} \Rightarrow \frac{dx}{y} = z\,e^{-z}\,dz$$

نعوض قيمة y من c_1 بدلالة x و c_1

$$x^2 + y^2 = c_1 \Rightarrow y^2 = c_1 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{c_1 - x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{\sqrt{c_1 - x^2}} = z\,e^{-z}\,dz$$

$$u = z \Rightarrow du = dz, \quad e^{-z}\,dz = dv \Rightarrow v = -e^{-z}$$

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{c_1}} = -z\,e^{-z} + \int e^{-z}\,dz$$

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{c_1}} = -z\,e^{-z} - e^{-z} + c_2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow c_2 = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + z e^{-z} + e^{-z}$$

$$\Rightarrow F(c_1, c_2) = 0$$

$$F\left(x^2+y^2, \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + e^{-z}(1+z)\right) = 0$$

② أوجد السطح التكاملي للمعادلة :

$$x y^3 p + x^2 z^2 q = y^3 z$$

الحل : نأخذ الجملة المساعدة :

$$\frac{dx}{x y^3} = \frac{dy}{x^2 z^2} = \frac{dz}{y^3 z}$$

من النسبتين ① و ③

$$\frac{dx}{x y^3} = \frac{dz}{y^3 z} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln z + \ln c_1' \Rightarrow x = c_1 z \Rightarrow c_1 = \frac{x}{z}$$

من النسبتين ② و ③

$$\frac{dy}{x^2 z^2} = \frac{dz}{y^3 z}$$

$$\Rightarrow \frac{y^3 dy}{x^2} = z\, dz$$

$$\Rightarrow \frac{y^3 dy}{c_1^2 z^2} = z\, dz \Rightarrow y^3 dy = c_1^2 z^3 dz$$

$$\frac{y^4}{4} - \frac{c_1^2}{4} z^4 = c_2' \Rightarrow c_2 = y^4 - x^2 z^2$$

$$F(c_1, c_2) = F\left(x/z,\; y^4 - x^2 z^2\right) = 0$$

③ أوجد حل مسائل الشروط التالية باستخدام فصل المتغيرات

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\frac{\partial z}{\partial y} + z \; ; \; z(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$$

الحل

$$Z = X \cdot Y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X'Y \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = XY'$$

$$X'Y = 2XY' + XY \implies X'Y = X(2Y' + Y)$$

$$\Rightarrow \frac{X'}{X} = \frac{2Y'}{Y} + 1 = \lambda$$

$$\frac{X'}{X} = \lambda \Rightarrow \ln X = \lambda x + c_1' \Rightarrow X = e^{\lambda x + c_1'}$$

$$X = c_1 e^{\lambda x}$$

$$\frac{2Y'}{Y} + 1 = \lambda \Rightarrow \frac{Y'}{Y} = \frac{\lambda - 1}{2} \Rightarrow \ln Y = \frac{\lambda - 1}{2} y + c_2'$$

$$\Rightarrow Y = c_2 e^{\frac{\lambda - 1}{2} y}$$

$$Z = X \cdot Y \;,\; Z = c_1 e^{\lambda x} \cdot c_2 e^{\frac{\lambda - 1}{2} y}$$

$$Z = c_3 e^{(\lambda x + \frac{\lambda - 1}{2} y)}$$

ومنه وفق مبدأ تركيب الحلول

$$Z = c_4 e^{\lambda_1 x + \frac{\lambda_1 - 1}{2} y} + c_5 e^{\lambda_2 x + \frac{\lambda_2 - 1}{2} y}$$

ومن الشرط

$$Z(x,0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$$

بالمطابقة

$$c_4 = 3 \;,\; c_5 = 2 \;,\; \lambda_1 = -5 \;,\; \lambda_2 = -3$$

ومنه الحل هو: $Z = 3e^{-5x-3y} + 2e^{-3x-2y}$

④ أوجد الحل باستخدام طريقة شاربت

$$(p+q)(px+qy)=0$$

الحل: نلاحظ أن المعادلة السابقة هي عبارة عن جداء معادلتين، فعلينا نوجد الحل التام للأولى و الثانية و الحل هو جداء الحلين.

أولاً، $p+q=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}=0,\ \frac{\partial F}{\partial z}=0,\ \frac{\partial F}{\partial p}=1,\ \frac{\partial F}{\partial q}=1$$

نوجد الجملة المساعدة وهي:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{p+q}=\frac{-dp}{0}=\frac{-dq}{0}$$

(1) (2) (3) (4) (5)

من ④ و ⑤

$$dp=0 \Rightarrow p=a$$

نعوض p في المعادلة

$$p=-q \Rightarrow q=-a$$

نعوض p و q في المعادلة التفاضلية الكلية $dz=p\,dx+q\,dy$

$$dz=a\,dx-a\,dy \Rightarrow z=ax-ay+b$$

وهو الحل التام للمعادلة الخطية الأولى

ثانياً $(**)\ px+qy=0$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=0,\ \frac{\partial F}{\partial x}=p,\ \frac{\partial F}{\partial y}=q,\ \frac{\partial F}{\partial p}=x,\ \frac{\partial F}{\partial q}=y$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xp+qy}=\frac{-dp}{p}=\frac{-dp}{q}$$

$(1), (4) \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = \dfrac{-dp}{p}$

$\ln x = -\ln p + \ln c \Rightarrow x = \dfrac{c}{p} \Rightarrow p = \dfrac{c}{x}$

نعوض في ~~(x x)~~

$\dfrac{c}{x} x + qy = 0 \Rightarrow q = \dfrac{-c}{y}$

نعوض p، q في المعادلة التفاضلية الكلية

$dz = p\,dx + q\,dy$

$dz = \dfrac{c}{x} dx - \dfrac{c}{y} dy$

$z = c\ln x - c\ln y + d$

وهذا الحل التام الثاني

ومنه الحل التام هو جداء الحلين التامين

$z = (ax - ay + b)(c\ln x - c\ln y + d)$

انتهت الاجابة