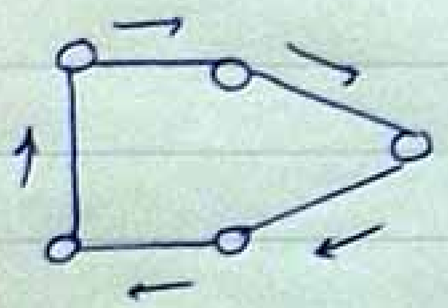
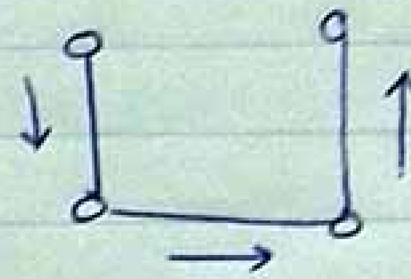
- بيانات أويلر :

* تعريف : ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ ولتكن $C=<x_1,\dots,x_n=x>$ دائرة بحيث C تحوي جميع عقد البيان وجميع أضلاعه (الدائرة هي مسار مغلق) عندئذٍ نسمّي البيان G بيان أويلر ونسمّي الدائرة C دائرة أويلر.

* تعريف : ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ وليكن $\omega=<x,\dots,y>$ طريق بحيث يحوي جميع عقد البيان وأضلاعه عندئذٍ نقول عن ω أنّه طريق أويلر ونسمّي البيان G بيان نصف أويلر.

(دائرة)



(طريق)

- مبرهنة : ليكن لدينا البيان المترابط $G(V;E)$ ولتكن C دائرة فيه $C=<x_1,e_1,\dots,x_{n-1},e_{n-1},x_n=x>$ وليكن لدينا البيان : $H(V;E-\{e_1,\dots,e_{n-1}\})$ وليكن لدينا البيان : $G'(V';E-\{e_1,\dots,e_{n-1}\})$ حيث V' معرّفة كمايلي :

$V'=\{x : x\in V \wedge$ x عقدة غير معزولة في $H\}$, $V'\neq\phi$

عندئذٍ :

$$V'\cap\{x_1,\dots,x_n\}\neq\phi$$

البرهان :

لتكن العقدتين $x\in\{x_1,\dots,x_n\}$ و $y\in V'$ وبما أنّ البيان G بيان مترابط فإنّه يوجد ممر على الأقل من العقدة x إلى العقدة y ، نختار ممر $x=y_1,e_1,y_2,\dots,e_{m-1},y_m=y$ بحيث يحوي العقدة y_r التي تحقق :

$y_r\in\{x_1,\dots,x_n\}$ حيث $1\le r\le m$ (وهو أكبر عدد صحيح يحقق ذلك)

غير خاليتين:

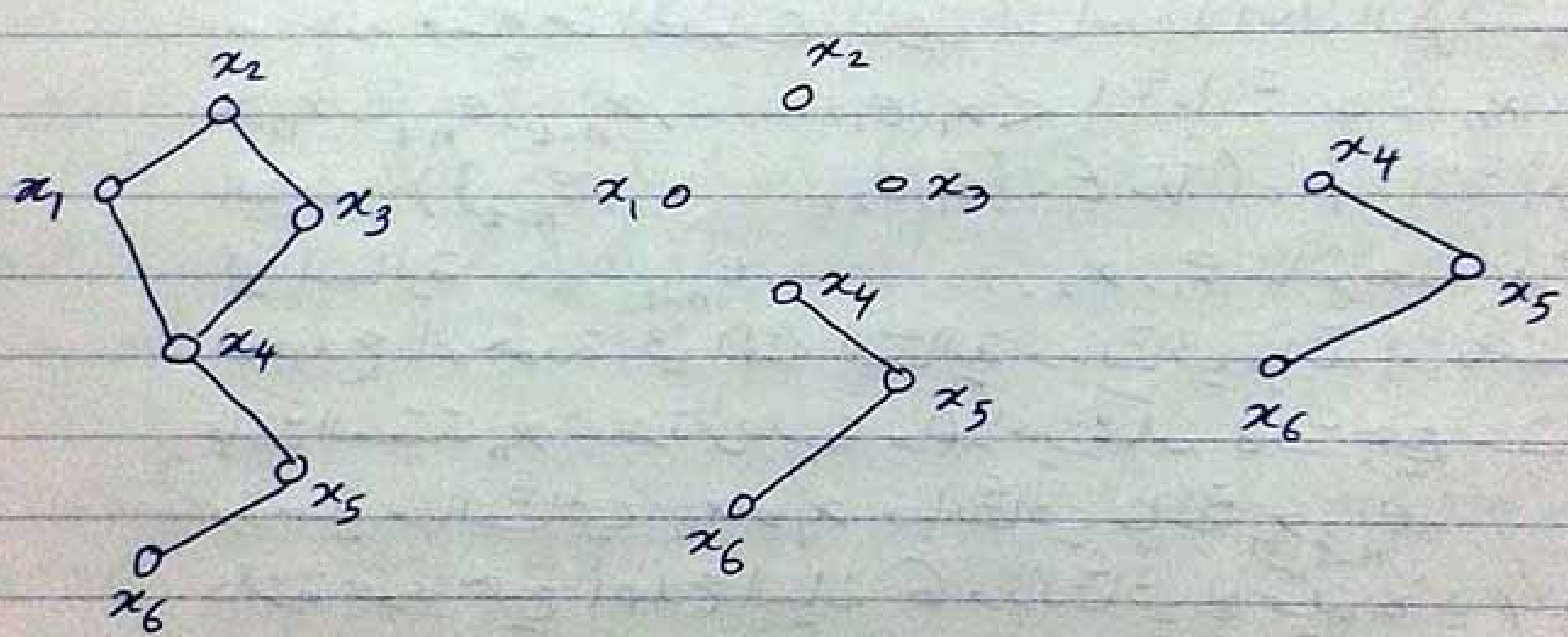
- من أجل $r=m$ فإن العقدة y_r غير معزولة في H: (لأننا اشترطنا في y_r أن تؤثر في ضلع لا ينتمي للدائرة) وبالتالي $y_r \in V'$

بالتالي: $y=y_m=y_r \in V' \cap \{x_1,\dots,x_n\}$

- من أجل $r<m$ فإننا نستنتج من تعريف r أن العقدتين: $y_r \in \{x_1,\dots,x_n\}$ و $y_{r+1} \notin \{x_1,\dots,x_n\}$ وبالتالي فإن الضلع $e_r=(y_r,y_{r+1})$ ضلع في البيان G' وبالتالي فإن العقدة y_r غير معزولة في H وبالتالي $y_r \in V'$ ←

أي أنه في كلا الحالتين: $y_r \in V' \cap \{x_1,\dots,x_n\}$

$V' \cap \{x_1,\dots,x_n\} \neq \phi$



$G(V;E)$ $H(V;E')$ $G'(V';E')$

دوماً يكون تقاطع عقد الدائرة $=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ مع $V'=\{x_4,x_5,x_6\}$ غير خالي.

- مبرهنة: ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ جميع عقده زوجية، عندئذٍ البيان G لا يحتوي على أي جسور.

البرهان:

نختار عقدة عشوائية x_1 من عقد البيان G وبما أن جميع عقد البيان
G عقد زوجية :

$$\forall x_i \in V : deg(x_i) \geq 2$$

عندئذ :

$x_2 \in V$ حيث $\exists\, e_1 = (x_1, x_2) \in E$

وبالتالي يوجد طريق $\langle x_1, e_1, x_2 \rangle$ وبما أن $deg(x_2) \geq 2$
فإنه توجد العقدة $x_3 \in V$ بحيث $e_2 = (x_2, x_3) \in E - \{e_1\}$ فنحصل
على الطريق $\langle x_1, e_1, x_2, e_2, x_3 \rangle$ وبما أن $deg(x_3) \geq 2$ فإنه
توجد العقدة x_4 بحيث $e_3 = (x_3, x_4) \in E - \{e_1, e_2\}$ ، نكرر هذه العملية
عدة مرات ، وبما أن البيان منتهي فإن تكرار هذه العملية يتوقف
بعد عدد منته من الخطوات ، لنفرض أننا حصلنا على الطريق :
$\langle x_1, e_1, \ldots, x_{n-1}, e_{n-1}, x_n \rangle$ إذاً بما أن $deg(x_n) = 0$ في
البيان $H = (V ; E - \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\})$ ، إن أي عقدة
في المتتالية $e_1, x_2, \ldots, e_{n-1}$ تتأثر بعدد زوجي من
الأضلاع الموجودة في هذه المتتالية وبالتالي فإنه إذا كان $x_1 \neq x_n$
فإن العقدة x_n عقدة فردية وهذا غير ممكن لأن جميع عقد البيان
زوجية وبالتالي $x_1 = x_n$ وبالتالي فإن $x_1, e_1, \ldots, e_{n-1}, x_n$
دائرة تحوي جميع أضلاع البيان G وبالتالي لا يمكن لأي ضلع في
G أن يكون جسراً فيه .

- مبرهنة :

يكون البيان $G(V;E)$ بيان أويلر إذا وفقط إذا كان البيان G بيان
مترابط وجميع عقده زوجية .

البرهان :

($\Leftarrow$) ليكن البيان G بيان أويلر ، إذاً توجد دائرة :
$x = x_1, e_1, x_2, \ldots, e_{n-1}, x_n = x$ تحتوي على جميع أضلاع
البيان G وبالتالي G مترابط وكل عقدة في المتتالية :

$e_1, x_2, \ldots, e_{n-1}$ تتأثر بعدد زوجي من الأضلاع الموجودة في

هذه المتتالية (x_2 تتأثر بـ e_1 و e_2 و x_3 تتأثر بـ e_2 و e_3 و

هكذا .....) كما أن العقدة $x = x_1 = x_n$ وبالتالي جميع عقد البيان

G عقد زوجية .

($\Leftarrow$) نفرض أن جميع عقد البيان زوجية والبيان مترابط ولنثبت أنه

بيان أويلر ، ننشئ دائرة أويلر في البيان G وفق الخطوات التالية :

$\boxed{1}$ نختار العقدة $x_1 \in V$ وبما أن $deg(x_1) \geq 2$ فإنه يوجد :

$e_1 = (x_1, x_2) \in E$ ولدينا $deg(x_2) \geq 2$ وبالتالي يوجد :

$e_2 = (x_2, x_3) \in E$ وهكذا ... وبالتالي نستطيع إنشاء الدائرة

$x_1, e_1, x_2, \ldots, e_{n-1}, x_n$ وذلك ممكن لأن :

[جميع عقد البيان زوجية $\Rightarrow$ البيان لا يحتوي على جسور $\Rightarrow$ يمكن إنشاء دائرة]

$\boxed{2}$ إذا كانت المتتالية $x_1, e_1, \ldots, x_n$ دائرة أويلر (تحوي

جميع أضلاع البيان) فيكون G بيان أويلر ويتم المطلوب .

أما إذا كانت هذه الدائرة ليست دائرة أويلر نرمز لـ G_1 البيان الذي

نحصل عليه من البيان G بعد حذف أضلاع هذه الدائرة وحذف العقد

المعزولة (الناتجة بعد حذف هذه الأضلاع)

مداخلة ليس لها علاقة بالبرهان : جميع عقد G_1 زوجية وهي صنفان :

عقد لم تتأثر بالحذف فبقيت زوجية كما هي في G .

عقد : حذفت أضلاع كانت تؤثر بها هذه العقد لكن لكل عقدة حُذف

(من أضلاع الدائرة) عدد زوجي فبقي عدد الأضلاع التي تؤثر بها العقدة

انتهت المداخلة

زوجياً كما كان في G .

وبالتالي حسب مبرهنة سابقة نجد أن :

$$V_1 \cap \{\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\text{عقد الدائرة}}\} \neq \phi$$

لتكن العقدة $x_j \in V_1 \cap \{x_1, \ldots, x_n\}$ نستطيع أن ننشئ دائرة من x_j

إلى x_j هي $(x_j = y_1, e_1, y_2, \ldots, e_{m-1}, y_m = x_j)$ في البيان

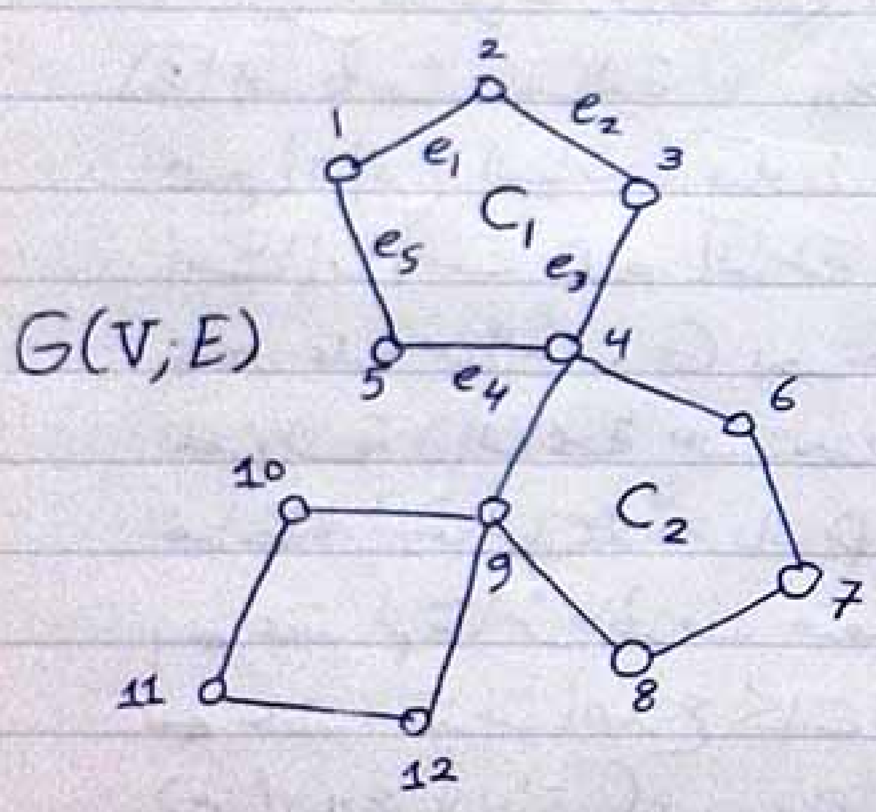
G_1 (لأن عقده زوجية) ونضيفها إلى الدائرة :

$(x_1, e_1, x_2, \ldots\ldots, x_j = y_1, c_1, \ldots\ldots c_{m-1}, y_m = x_j, e_j, \ldots\ldots x_n)$

ملاحظة: الدائرة هنا هي طريق مغلق أي يمكن تكرار العقد ولا يمكن تكرار الأضلاع.

3 نكرر الخطوة 2 على الدائرة الأخيرة التي حصلنا عليها في الخطوة 2 ومبما أن البيان G بيان منتهٍ فإن عملية التكرار تتوقف بعد عدد منتهٍ من الخطوات وبالتالي نحصل على دائرة أويلر (تحوي جميع الأضلاع) في البيان G وهو المطلوب.

مثال للتوضيح:



1 ليكن البيان $G(V;E)$ جميع عقده زوجية ومترابط لنثبت أنه بيان أويلر.

نختار $x_1 \in V$ ونلاحظ أن $deg(x_1) = 2$ وبالتالي يوجد ضلع $e_1 = (x_1, x_2) \in E$ ولدينا $deg(x_2) = 2$ $\Leftarrow$ $\exists e_2 = (x_2, x_3)$ حتى نصل إلى الدائرة:

$C_1 = \langle x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, x_4, e_4, x_5, e_5, x_1 \rangle$

2 نلاحظ أن C_1 لا تحوي جميع أضلاع البيان فهي ليست دائرة أويلر لذلك نقوم بحذف أضلاع الدائرة C_1 وحذف العقد المعزولة الناتجة عن حذف الأضلاع. نلاحظ أن جميع عقد G_1 (جميع العقد لم تتأثر بالحذف باستثناء x_4 حيث كانت $deg(x_4) = 4$ فأصبحت $deg(x_4) = 2$

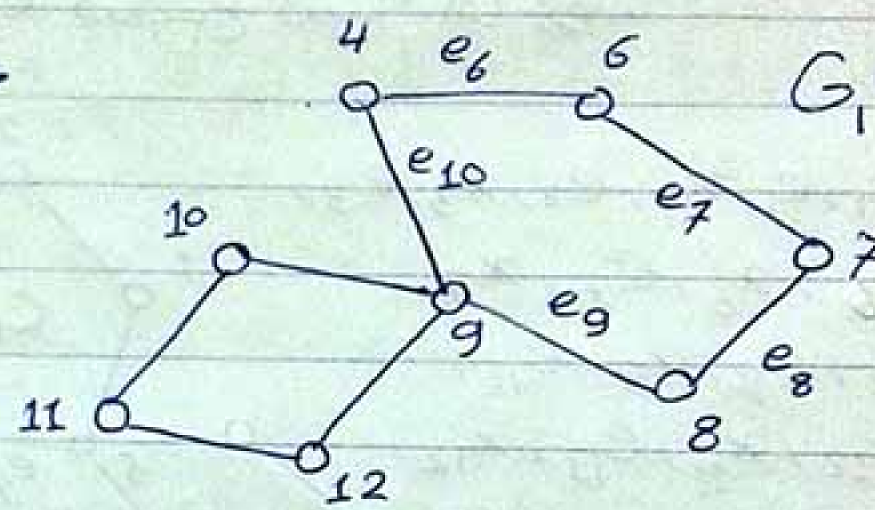
$\underset{\text{زوجي}}{4} - \underset{\text{زوجي}}{2} = \underset{\text{زوجي}}{2}$

نلاحظ أن $V_1 = \{4, 6, 7, \ldots, 12\}$ وعقد الدائرة C_1 هي $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ وبالتالي:

$$\{x_4\} = V_1 \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \neq \phi$$

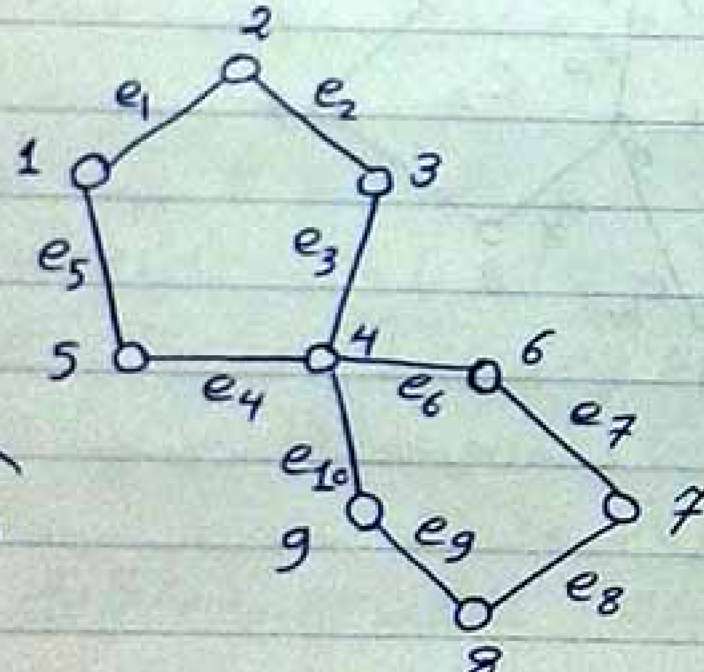
لنأخذ $x_j = x_4$ ، نستطيع أن ننشئ الدائرة:

$$C_2 = < x_4, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_8, e_9, x_9, e_{10}, x_4 >$$



$G_1(V_1 ; E_1)$

من العقدة x_4 إلى العقدة x_4 ، نضيف هذه الدائرة إلى الدائرة الأولى C_1 فنحصل على الشكل المبين في الأسفل:



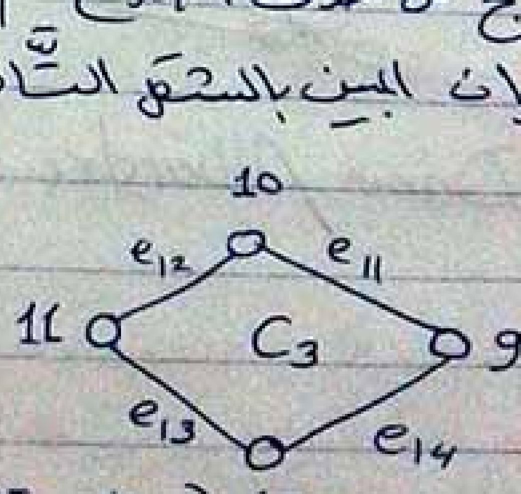
C_1'

ونكتبها:

$$C_1' = < x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, x_4, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_8, e_9, x_9, e_{10}, x_4, e_4, e_4, x_5, e_5, x_1 >$$

نكرر العملية (الخطوة $\boxed{2}$) على الدائرة الأخيرة C_1' أي نحذف أضلاع هذه الدائرة من البيان الأصلي G فنحصل على البيان $G_2(V_2 ; E_2)$ الناتج عن حذف أضلاع C_1' والعقد المعزولة الناتجة فيكون G_2 هو البيان المبين بالشكل التالي:

(نلاحظ أن C_1' ليس دائرة أولية حسب مبرهنة سابقة بحثناها:)



$G_2(V_2 ; E_2)$

$$V_2 = \{10, 9, 11, 12\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 5\} \neq \phi$$

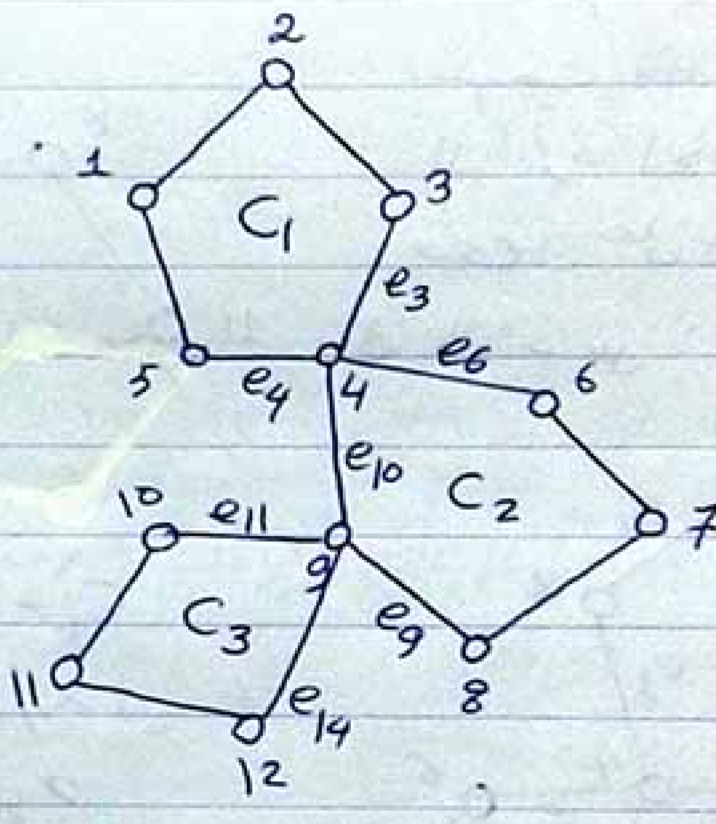
$$V_2 \cap \{1, \ldots\ldots, 9\} = \{9\}$$

لتكن $x_j = x_9$ ننشئ الدائرة :

$$C_3 = \{x_9, e_{11}, x_{10}, e_{12}, x_{11}, e_{13}, x_{12}, e_{14}, x_3\}$$

ونضيفها إلى الدائرة C_1' فتصبح لدينا الدائرة :

$$C_2' = \langle x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, x_4, e_6, x_6, e_7, x_7, e_8, x_8, e_9, x_9, e_{11}, x_{10}, e_{12}, x_{11}, e_{13}, x_{12}, e_{14}, x_9, e_{10}, x_4, e_4, x_5, e_5, x_1 \rangle$$



وهي دائرة أويلر
لأنها تحوي جميع أضلاع البيان
وبالتالي G هو بيان
أويلر

انتهت المحاضرة السابعة

Dania Albarsha