المحاضرة التاسعة.

21/4/2014

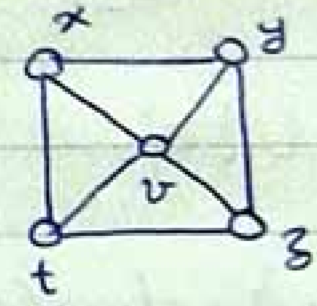
- مبرهنة: ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$ عدد عقده $|V|=n\geq 3$ حيث:

$$\forall x,y\in V\ ;\ x\neq y\ ;\ deg(x)+deg(y)\geq n$$

عندئذٍ يكون G هو بيان هاملتون.

ملاحظة: هذا الشرط كافٍ وغير لازم: أي إذا كان G بيان هاملتون فليس من الضرورة أن تكون العلاقة صحيحة.

- مثال: G



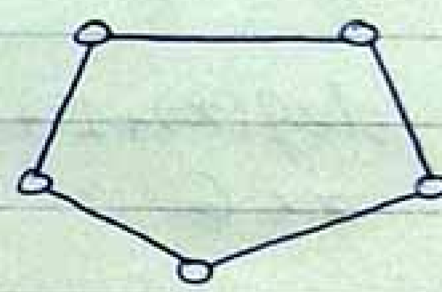
$deg(x)+deg(y)=6\geq 5$ ✓

$deg(x)+deg(z)=deg(x)+deg(t)$
$=deg(y)+deg(z)=deg(z)+deg(t)$
$=6\geq 5$ ✓

$deg(x)+deg(v)=deg(y)+deg(v)=deg(z)+deg(v)=$
$deg(t)+deg(v)=7\geq 5$ ✓

وبالتالي G هو بيان: دائرة هاملتون: $C=<x,y,v,z,t,x>$

- مثال: $G(V;E)$



هذا البيان هو بيان هاملتون لكن:

$\forall x,y\in V: deg(x)+deg(y)$
$=4\geq 5$ ✗

غير محقق مع أن البيان بيان هاملتون.

- نتيجة: ليكن $G(V;E)$ بيان بسيط عدد عقده $|V|=n\geq 3$ حيث: $\forall x\in V: deg(x)\geq \frac{n}{2}$ عندئذٍ البيان G هو بيان هاملتون.

الإثبات:

$$\forall x,y\in V\ ,\ x\neq y\ :\ deg(x)\geq \frac{n}{2}\ ,\ deg(y)\geq \frac{n}{2}$$

$$\rightarrow deg(x)+deg(y)\geq \frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n$$

- نتيجة: ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$ عدد عقده $|V|=n\geq 3$ بحيث:

$(x,y)\in E$ ، $\forall x,y \in V$ ، $x\neq y$ ؛ $\deg(x)+\deg(y)\geq n-1$

عندئذٍ البيان G نصف هاملتوني.

البرهان:

لنفرض أنه: $\forall x,y\in V : x\neq y \Rightarrow \deg(x)+\deg(y)\geq n-1$

نضيف العقدة x_0 إلى البيان G بحيث تجاور جميع عقد البيان وبالتالي

يصبح لدينا البيان: $G'(V';E')$ حيث:

حيث $E' = E\cup\{e_1',\ldots\ldots,e_n'\}$ ، $V' = V\cup\{x_0\}$

وبالتالي: $e_i' = (x_0,x_i)_{i=1:n}$

$$\forall x\in V'-\{x_0\} : \underset{x\in G'}{\deg(x)} = \underset{x\in G}{\deg(x)}+1$$

وحسب الفرض:

$$\forall x,y\in V,\ x\neq y : \deg(x)+\deg(y)\geq n-1$$

نضيف للطرفين 2

$$\underset{x\in G}{\deg(x)+1} + \underset{y\in G}{\deg(y)+1} \geq n+1$$

$$\longrightarrow$$

$$\underset{x\in G'}{\deg(x)} + \underset{y\in G'}{\deg(y)} \geq n+1$$

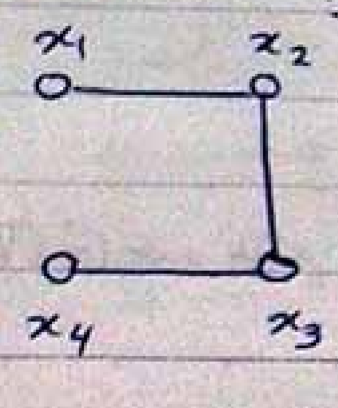
يمكن تصغير الحد الأيمن

$$\forall x,y\in V',\ x\neq y : \deg(x)+\deg(y)\geq n$$

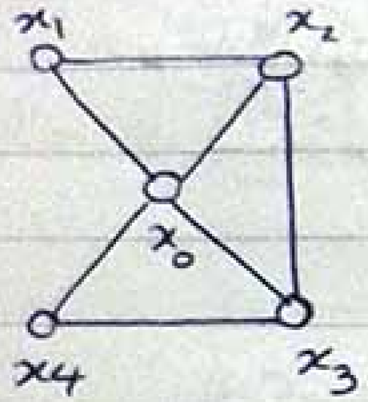
وبالتالي G' هو بيان هاملتوني أي أنه يوجد دائرة هاملتون ، وبحذف العقدة x_0 تصبح الدائرة ع هاملتوني وبالتالي G بيان نصف هاملتون

مثال توضيحي:

$$\forall x_i, x_j\in V ; \deg(x_i)+\deg(x_j) = 2+2 = 4 \geq n-1 = 3$$



$G(V;E)$



بإضافة العقدة x_0 التي تجاور جميع العقد في G نجد أنَّ:

$G'(V';E')$

$$\forall x_i, x_j \in V' : deg(x_i) \quad deg(x_j) =$$

$3+3=6 \geqslant n=5$ ✓

أو $3+4=7 \geqslant 5$ ✓

أو $2+3=5 \geqslant 5$ ✓

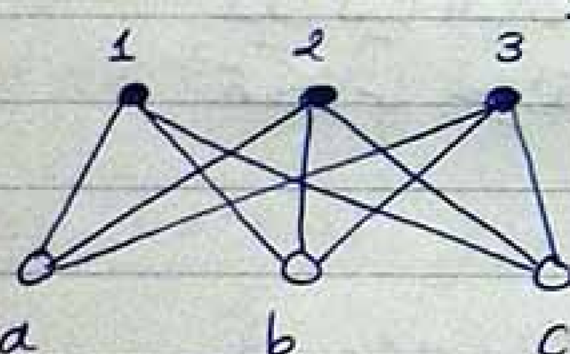
أو $2+4=6 \geqslant 5$ ✓

وبالتالي G' هاملتون ودائرته $\langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_0 \rangle$

وبحذف العقدة x_0 والأضلاع التي تؤثر بها x_0 نحصل على G.

وبالتالي تصبح دائرة هاملتون G هاملتون $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$

تمرين: أثبت أنَّ البيان $K_{3,3}$ هو بيان هاملتون:



الحل: البيان $K_{3,3}$ هو:

$\forall x \in V : deg(x) = 3 \geqslant \frac{n}{2} = \frac{6}{2}$ ✓

محققة وبالتالي $K_{3,3}$ بيان هاملتون.

دائرة هاملتون:

$$C = \langle 1, a, 2, b, 3, c, 1 \rangle$$

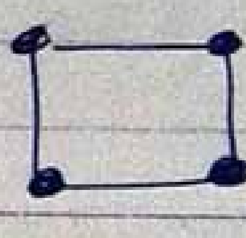
- البيانات المنتظمة:

ليكن لدينا البيان $G(V;E)$ وليكن $r \geqslant 0$ عدد صحيح، نقول أنَّ البيان G بيان منتظم من الدرجة r إذا كانت درجة أي عقدة من مجموعة العقد V في البيان G تساوي r أي:

$G(V;E)$ منتظم $\Leftrightarrow \forall x \in V : deg(x) = r$

أمثلة على بيانات منتظمة:

العروة تعادل ضلعين



- البيانات المنتظمة:

ليكن لدينا البيان المنتظم $G(V,E)$ من الدرجة r ولتكن $|V|=n$ عندئذٍ:

$$|E| = \frac{n*r}{2}$$

الإثبات: نعلم أن مجموع درجات العقد: $\sum_{x\in V} deg(x) = 2|E|$

وبما أنّ:

$$\sum_{x\in V} r = 2|E| \quad \leftarrow \forall x\in V: deg(x)=r$$

$$\rightarrow n*r = 2|E| \rightarrow |E| = \frac{n*r}{2}$$

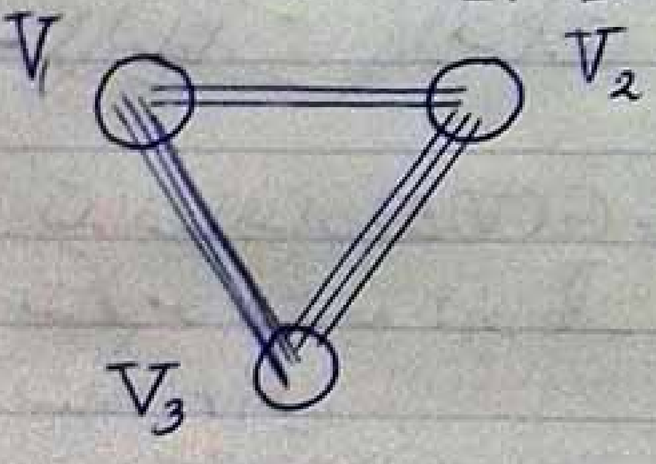
- البيانات متعددة التجزئة:

ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$ نقول عن G إنّه متعدد التجزئة إذا تمكنا من تجزئة مجموعة عقده وفق ما يلي:

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \;,\; \bigcap_{i=1}^{n} V_i = \phi$$

$\forall x,y \in V_i \;;\; \nexists\, e=(x,y)\in E$ لا يوجد ضلع بينهما.

* إذا كان البيان ثلاثي التجزئة، نسمّي البيان بيان زوجي:



$G(V_1;V_2,V_3;E)$ $\qquad$ $G(V_1,V_2;E)$

- البيان التام:

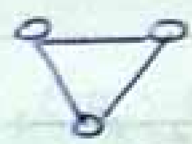
إنّ البيان البسيط K_n حيث عدد عقده $|V|=n$ بيان تام إذا تحقق:

من أجل كل عقدتين $x,y\in V$ يوجد ضلع واحد يربط بينهما $e=(x,y)$.

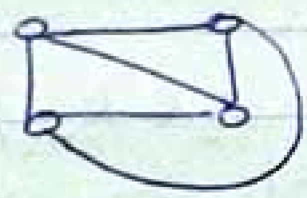
أمثلة على البيانات التامة:

K_1

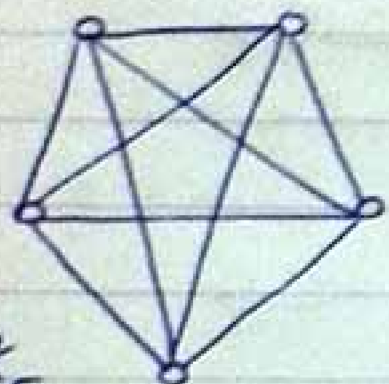
K_2



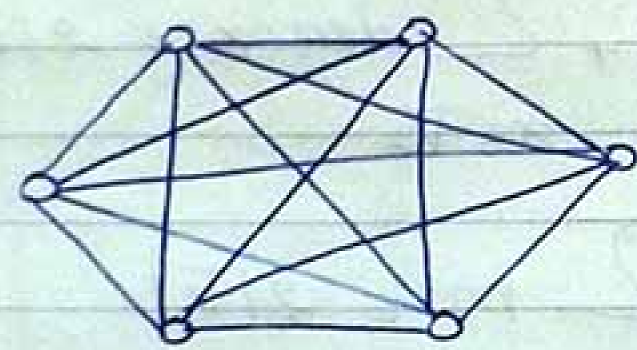
K_3



K_4



K_5



K_6

$\forall x\in K_n : deg(x)=n-1 \rightarrow$ K_n منتظم من الدرجة $n-1$

- مبرهنة: ليكن البيان التام $K_n=(V;E)$ عندئذٍ: $|E|=\frac{n*(n-1)}{2}$

- واضح أنّ البيان التام K_n بيان منتظم من الدرجة $n-1$ وبالتالي:

$$|E|=\frac{n*r}{2}=\frac{n*(n-1)}{2}$$

وهو المطلوب

- البيان متعدد الأجزاء التام:

هو بيان ترتبط فيه كل عقدة بجميع عقد البيان عدا العقد التي تقع في مجموعتها.

ليكن $G(V_1,V_2,\dots,V_n;E)$ بيان تام متعدد التجزئة عندئذٍ:

$\forall x\in V_i : (i=1:n), \exists e=(x,y), y\in V_j\ (j=i:n)$

$\wedge\ i\neq j$

- تعريف: الدائرة الزوجية: هي الدائرة التي عدد أضلاعها زوجي.
الدائرة الفردية: هي الدائرة التي عدد أضلاعها عدد فردي.
- ملاحظة: إذا كان البيان زوجي فإن أي دائرة في هذا البيان دائرة زوجية

- مبرهنة: إذا كان $K_{m,n}(V_1,V_2;E)$ حيث $|V_1|=m, |V_2|=n$
فإن: $|E| = m * n$
الإثبات: بما أن:

$$\sum_{x\in V_1} deg(x) + \sum_{x\in V_2} deg(x) = 2|E|$$

فإن:

$$\sum_{x\in V_1} n + \sum_{x\in V_2} m = 2|E|$$

$$\rightarrow m*n + n*m = 2|E| \Rightarrow 2(m*n) = 2|E|$$

$$\rightarrow |E| = m*n$$

- نتيجة: الشرط اللازم والكافي ليكون البيان البسيط المترابط $G(V;E)$ بياناً زوجياً هو ألا يملك هذا البيان أي دائرة فردية.

انتهت المحاضرة التاسعة

Dania Albarsha