مبرهنة: نفرض $G(V,E)$ بيان بسيط ونفرض $x,y \in V$ حيث $|V|=n$ و $x \neq y$
عندئذٍ:

1) إذا كان D ممر من x إلى y فإن D طريق.
2) إذا كان D ممر من x إلى x فإن D دائرة.

البرهان:

(الممر هو متتالية من الأضلاع والعقد لا تتكرر فيه العقد ولا تتكرر فيه الأضلاع)

1) نستخدم طريقة البرهان العكسي، نفرض جدلاً أن D ليس طريق، بما أن D ممر فليكن

$$D = \langle x, e_1, x_1, \dots, x_{n-1}, e_n, y \rangle$$

(D ليس طريق ← يسمح بتكرار الأضلاع)

$$\exists\, i,j \,;\, i \neq j \wedge e_i \equiv e_j \wedge e_i, e_j \in D$$

وهذا يناقض كون D ممر ← D طريق.

2) نفرض أن D ممر من x إلى x عندئذٍ فإن D دائرة.

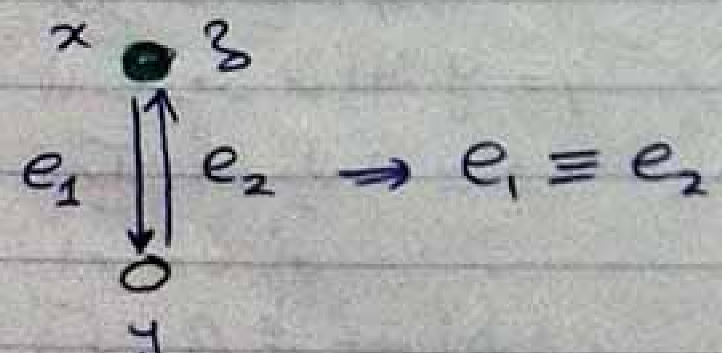
$$D = \langle x, e_1, x_1, \dots, x_{n-1}, e_n, x \rangle$$

نفرض جدلاً أن D ليس دائرة (الدائرة هي متتالية من العقد والأضلاع لا تتكرر فيها الأضلاع ولا العقد باستثناء عقدة البداية التي تساوي عقدة النهاية)، أي نفرض وجود ضلع مكرر:

$$\exists\, i,j \,;\, i \neq j \wedge e_i \equiv e_j$$

ونميز هنا عدة حالات:

أ) D يحوي ثلاث عقد وبما أن D ليست دائرة وبالتالي D ليس ممر (تكررت فيه عقدة)



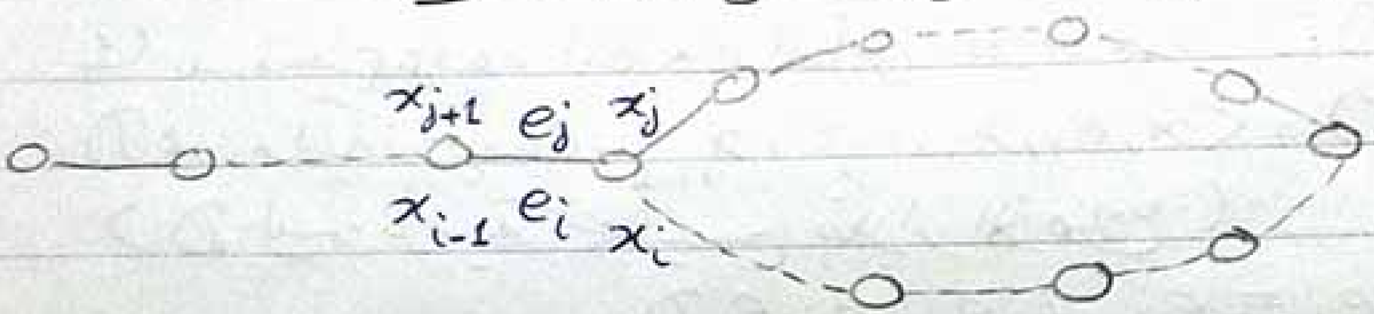
وهذا تناقض ← إذاً D دائرة.

ب) D يحوي أكثر من ثلاث عقد $n > 3$. بما أن D ليس دائرة إذاً

يحوي أضلاع مكررة أي:

$\exists i, j \; ; \; i \neq j$ و $e_i \equiv e_j$

بما أن البيان بسيط فلا يحوي عرى إذاً لو وجد لدينا متتالية من الأضلاع وهذه المتتالية ليست دائرة وفي هذه المتتالية هناك الضلع e_i يطابق e_j (ضلع مكرر) وبالتالي يوجد عقدة مكررة على الأقل وبالتالي D ليس مسار إذاً D دائرة.



• مبرهنة: ليكن لدينا البيان البسيط $G(V,E)$ بحيث $|V| = n$ و $|E| = m$ وليكن $x, y \in V$ بحيث $x \neq y$ عندئذٍ:

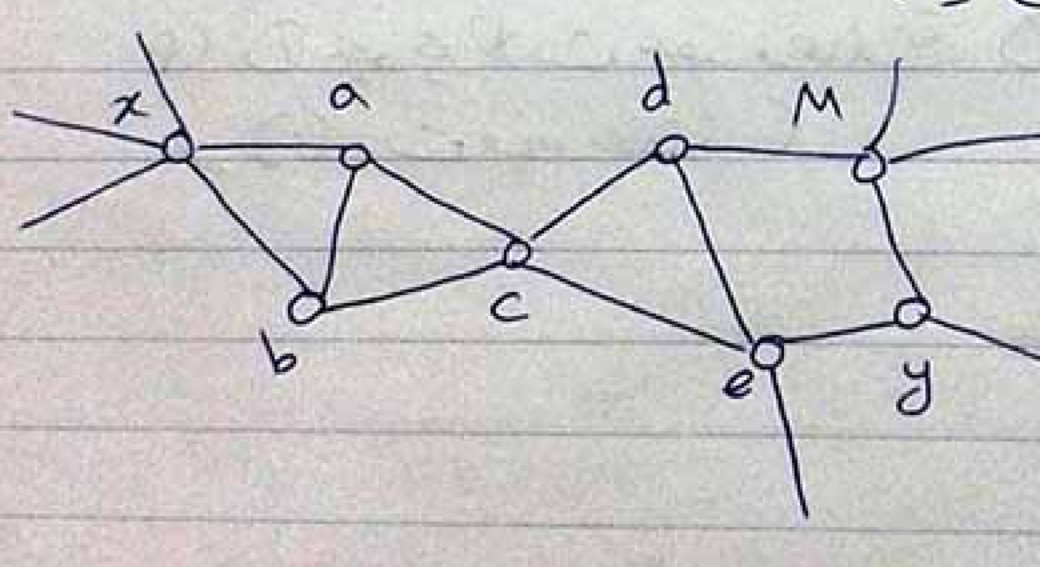
1) إذا وجد مسار من x إلى y فإنه يوجد مسار من x إلى y.

2) إذا وجد مسار من x إلى x فإنه يوجد دائرة من x إلى x.

الإثبات:

إن المسار هو متتالية من العقد والأضلاع يمكن فيها تكرار الأضلاع ويمكن فيها تكرار العقد.

• طول المسار = عدد الأضلاع في هذا المسار



مثلاً: في الشكل التالي يمكن أن يكون طول المسار من x إلى y = 4 ويمكن أن يكون = 5 أو = 6 أو ....

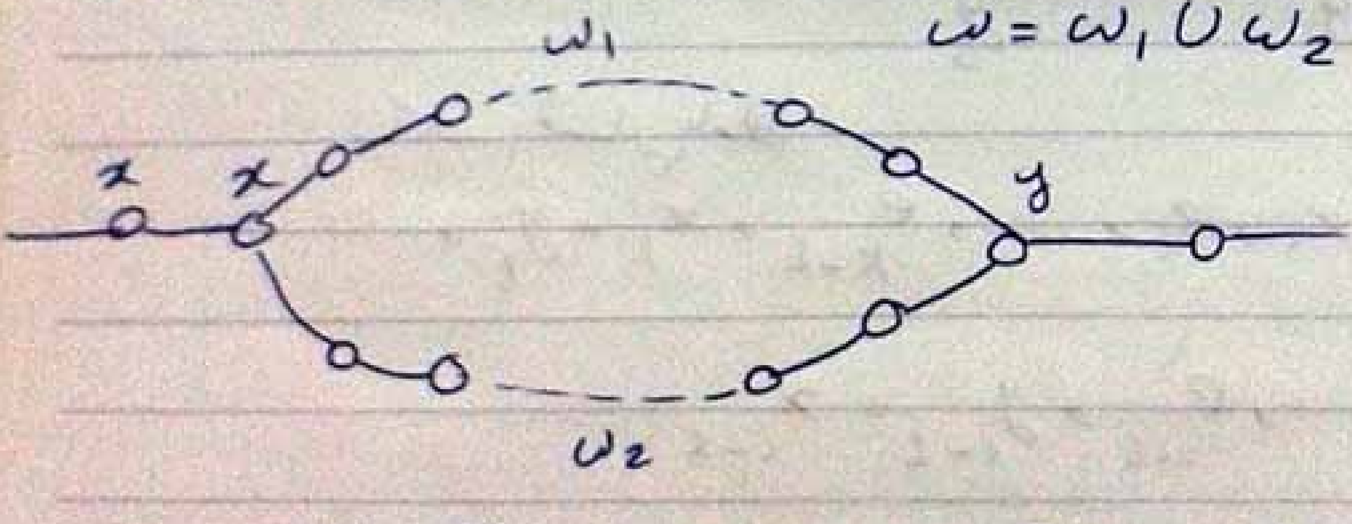
لتكن A مجموعة أطوال المسارات من x إلى y.

$A = \{ k$; k طول المسار من x إلى $y \}$ ولتكن $r = \min(A)$

إن المسار الذي طوله r هو مسار، نثبت ذلك كما يلي:

إن لم يكن ممر فيوجد عقدة مكررة على الأقل أي إذا كان المسار الذي طوله r هو $\omega = \langle v_1, e_1, \ldots, v_i, e_i, \ldots, e_r, v_{r+1} \rangle$
عندئذ:
$\exists\ i \neq j$ ، $v_i = v_j$
وبالتالي يوجد مسار أصغر منه من x إلى y وهذا ينافي كون $r = \min(A)$ وبالتالي ω ممر.
وبنفس الطريقة نبرهن (٢)

- مبرهنة: ليكن لدينا البيان البسيط $G(V;E)$، إذا وجد $x, y \in V$ بحيث $x \neq y$ بحيث يوجد ممران مختلفان من x إلى y فإن G يحتوي على دائرة.
أي إذا وجد $\omega_1 = \langle x, \ldots, y_1 \rangle$ ، $\omega_2 = \langle x, \ldots, y_2 \rangle$
بحيث $\omega_1 \neq \omega_2$ عندئذ G يحوي دائرة.
الإثبات:
إذا احتوى البيان G على عروة أو ضلع مضاعف (غير بسيط) عندئذ فإن G يحوي دائرة وكون البيان بسيط إذاً هو ممر لا يحوي أضلاع مضاعفة ولا يحوي عقد مكررة (كونه ممر).
نميز حالتين:
1) الممران مختلفان في جميع العقد باستثناء عقدة البداية x وعقدة النهاية y عندئذ يكون $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$ هو دائرة



2) الممران متطابقين ببعض العقد ومختلفين ببعضها الآخر، ليكن الممران من x إلى y:
$\omega_1 = \langle x = x_1, e_1, x_2, e_2, \ldots, e_{n-1}, x_n = y \rangle$

$w_2 = \langle x = y_1 , e'_1 , y_2 , e'_2 , \ldots , e'_{m-1} , y_m = y \rangle$

بما أن الممرين متطابقين ببعض العقد ومختلفين ببعضها الآخر ، لنفرض أنه يوجد i بحيث :

$x_i \neq y_i$ لكن $x_1 = y_1 , x_2 = y_2 , \ldots , x_{i-1} = y_{i-1}$

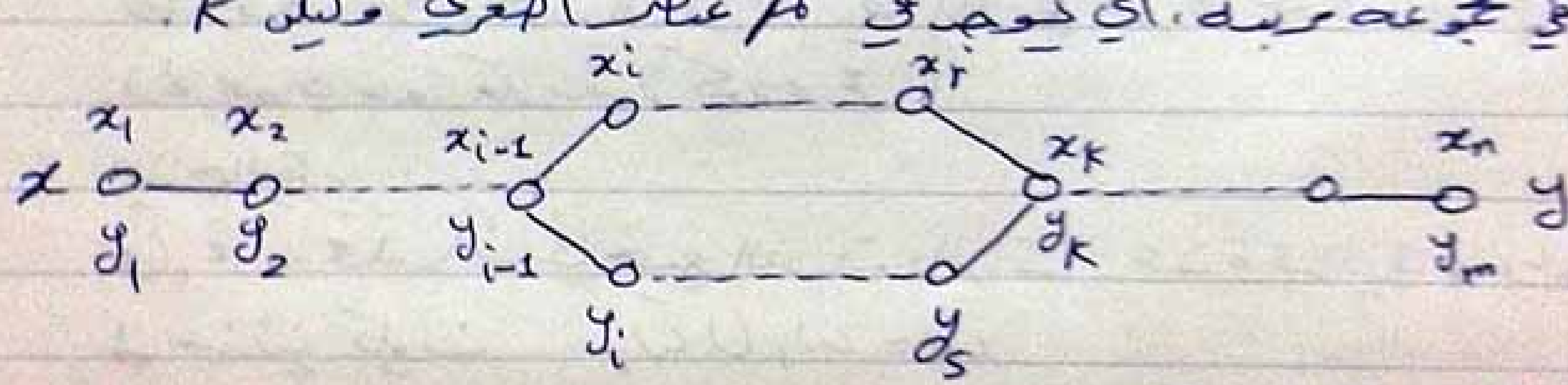
أي أن الدليل i هو الذي يفترق عنده الممران .

ولنضع المجموعة A :

$$A = \{ r : i < r \leq n \wedge \exists j ; i < j \leq m ; x_r = y_j \}$$

أي أن r هو الدليل الذي يلتقي عنده الممران وتتطابق فيهما العقد (يمكن أن يفترق الممران ويتطابقان أكثر من مرة كذلك r تأخذ قيمة تتطابق فيها x مع y)

بما أن $x_n = y_m = y$ فإن $A \neq \phi$ لأن $n \in A$ وبما أن A هي مجموعة أدلة فهي تشكل مجموعة جزئية من N وبالتالي هي مجموعة مرتبة . أي يوجد في A عنصر أصغري وليكن k .



لنأخذ المسار المغلق :

$$y_{i-1} = x_{i-1} , e_{i-1} , x_i , e_i , \ldots , e_{k-1} , x_k = y_t ,$$

$$e'_{t-1} , y_{t-1} , \ldots , e'_{i-1} , y_{i-1} = x_{i-1}$$

إن هذا المسار المغلق يبدأ من x_{i-1} ثم يتبع الممر الأول لغاية x_k ثم يعود متبعاً الممر الثاني لغاية y_{i-1} عندئذ :

يكون لدينا ممرين D_1 من x_{i-1} إلى x_k.

D_2 من y_t إلى y_{i-1}

وبما أن D_1 و D_2 مختلفين بجميع العقد (لأننا اخترنا k أصغري في A)

إذن $D_1 \cup D_2$ دائرة.

انتهت المحاضرة السادسة