القسم: الرياضيات.... السنة: الثانية... المحاضرة: السابعة عشرة...

المادة: معادلات تفاضلية (2) التاريخ: 11 / 5 / 2014 الدكتورة: ملك جابر ديبي..

حلول المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى الغير خطية:

نظرية الدوال الضمنية:

نفرض أنه لدينا العلاقتين:

$$① \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

$$② \quad \phi(x, y, z, p, q) = 0$$

حيث q, p دالتين مجهولتين تابعتين للمتغيرات المستقلة x, y, z عندها تكون المشتقات الجزئية كما يلي:

$$\boxed{I} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial q}}$$

$$\boxed{II} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial q}}$$

$$\boxed{III} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial q}}$$

$$\boxed{IV} \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial p}}{\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial q}}$$

طريقة شاربت في حل معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى غير خطية:

لتكن لدينا م. ت. ج. م. غير خطية من الشكل:

$$(1)\ldots\quad F(x,y,z,p,q)=0$$

حيث $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ، $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$

ولتكن المعادلة التفاضلية الجزئية التالية:

$$(2)\ldots\quad \phi(x,y,z,p,q,a)=0$$

حيث a هو ثابت اختياري، حيث (2) تحقق الشرطين التاليين:

(أ) إن حل المعادلتين (1)، (2) بالنسبة لـ p, q هو من الشكل:

$$(3)\quad \begin{cases} p=p(x,y,z,a) \\ q=q(x,y,z,a) \end{cases}$$

(ب) المعادلة التفاضلية الكلية

$$dz = p\,dx + q\,dy \quad \ldots(4)$$

قابلة للحل، عندها نسمي (2) معادلة تفاضلية متوافقة مع (1)

نعوض (3) في (4):

$$(5)\ldots\quad dz = p(x,y,z,a)\,dx + q(x,y,z,a)\,dy$$

إن (5) إما أن تقبل حلاً أو لا تقبل حلاً

إذا كانت (5) تقبل حلاً فيكون من الشكل: $F(x,y,z,a,b)=0$

لنعين الشروط للدالة ϕ حتى تكون (2) معادلة تفاضلية متوافقة مع (1)

(أ) إن شرط قابلية الحل للمعادلة (5) هو أن تحقق أمثالها العلاقة

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial z}} = \underbrace{\frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial z}} \quad (6)$$

اشتقاق q بالنسبة لـ x = اشتقاق p بالنسبة لـ y

نعوض في (7) المشتقات الجزئية : $\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial p}{\partial z}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)+q\left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial q}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)+p\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial p}\right)$$

ومنه بالحل والاختصار نحصل على المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى الخطية في ϕ الدالة المجهولة بـ x, y, z, p, q وهي من الشكل :

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial y}+\left(p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \phi}{\partial p}-\left(\frac{\partial F}{\partial y}-q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \phi}{\partial q}=0$$

نشكون الجملة المساعدة :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{-dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}\\=\frac{-dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}\end{aligned}\right\}\quad (9)$$

عندئذ نوجد أي حل للجملة (9) بحيث يحتوي على p ، q أو كلاهما

وهذا الحل يمثل شرط قابلية الحل للمعادلة (5)

ملخص طريقة شارب : لإيجاد الحل العام لـ م.ت.ج.م غير خطية نتبع ما يلي:

$$① \quad F(x,y,z,p,q)=0$$

① نحسب المشتقات الجزئية للمعادلة:

$$\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z},\ \frac{\partial F}{\partial p},\ \frac{\partial F}{\partial q}$$

ثم نعوض في الجملة المساعدة ⑨

② نوجد أي حل تام للجملة المساعدة وليكن

$$\phi(x,y,z,p,q,a)=0$$

بشرط يحوي على q، p أو كلاهما

③ نحل المعادلتين ①، ② بالنسبة لـ p و q

$$③ \begin{cases} p=p(x,y,z,a) \\ q=q(x,y,z,a) \end{cases}$$

نعوض ③ في ④

$$④ \quad dz=p\,dx+q\,dy$$

④ نوجد حل للمعادلة ④ من الشكل

$$⑤ \quad F(x,y,z,a,b)=0$$

وهو الحل التام للمعادلة التفاضلية ① ، عدد الثوابت = عدد المتغيرات.

⑤ إذا كان $b=T(a)$ دالة اختيارية فإن:

$$F(x,y,z,a,T(a))=0 \quad ⑥$$

هو حل عام للمعادلة التفاضلية، إذا كان $T(a)$ هي دالة معينة فإن ⑥ تكون حلاً خاصاً.

تمرين: أوجد الحل التام للمعادلة $(z+px)^2-q=0$ بطريقة شارب

الحل: نوجد المشتقات:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2p(z+px),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2(z + px) , \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 2x(z + px)$$

ومنه المعادلة المساعدة هي:

$$\frac{dx}{2x(z+px)} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{2xp(z+px)-q}$$

$$= \frac{-dp}{2p(z+px)+2p(z+px)} = \frac{-dq}{0+2q(z+px)}$$

من النسبتين ① و ④

$$\frac{dx}{2x(z+px)} = -\frac{dp}{4p(z+px)} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dp}{2p}$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}(\ln p + \ln \alpha) = \ln(\alpha p^{-\frac{1}{2}}) \Rightarrow$$

$$x = a p^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow p\alpha^{-2} = x^{-2} \Rightarrow p = \frac{x^{-2}}{\alpha^{-2}} = \frac{\alpha^2}{x^2} = \frac{a}{x^2}$$

نعوض p في المعادلة التفاضلية المعطاة

$$(z + px)^2 = q \Rightarrow (z + \frac{a}{x^2}x) = q$$

$$\Rightarrow q = (z + \frac{a}{x})^2$$

$dz = p\,dx + q\,dy$ نعوض p , q في المعادلة ④ ومنه

$$dz = \frac{a}{x^2}\,dx + (z + \frac{a}{x})^2\,dy$$

$$dz - \frac{a}{x^2}\,dx = (z + \frac{a}{x})^2\,dy$$

$$d(z + \frac{a}{x}) = (z + \frac{a}{x})^2\,dy$$

$$\frac{d(z+\frac{a}{x})}{(z+a/x)^2} = dy \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \frac{-1}{z+\frac{a}{x}} = y+b$$

$$\Rightarrow z+\frac{a}{x} = \frac{-1}{y+b} \Rightarrow z+\frac{a}{x}+\frac{1}{y+b}=0$$

وهو حل تام للمعادلة التفاضلية المعطاة

ومنه الحل العام هو $z+\frac{a}{x}+\frac{1}{y+\tau(a)}=0$

تمرين: أوجد حل تام للمعادلة التالية بطريقة شاربت

$$① \cdots z - pq = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}=-q,\quad \frac{\partial F}{\partial q}=-p$$

الجملة المرافقة هي:

$$\frac{dx}{-q}=\frac{dy}{-p}=\frac{dz}{-qp-pq}=\frac{-dp}{0+p}=\frac{-dq}{0+q}$$

من النسبتين ④ و ⑤

$$-\frac{dp}{p}=-\frac{dq}{q}$$

$$p=aq \xRightarrow{\text{نعوض في ①}} z=aq^2 \Rightarrow q=\sqrt{\frac{z}{a}}$$

$$p=a\sqrt{\frac{z}{a}}=\sqrt{az} \Leftarrow$$ نعوض q في p

نعوض p , q في ④ :

$$④ \cdots dz = p\,dx + q\,dy$$

$$dz=\sqrt{az}\,dx+\sqrt{\frac{z}{a}}\,dy$$

$$dz=\sqrt{a}\sqrt{z}\,dx+\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{z}\,dy$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{a}\,dx + \frac{dy}{\sqrt{a}} \xrightarrow{\text{بالمكاملة}} 2\sqrt{z} = \sqrt{a}\,x + \frac{y}{\sqrt{a}} + b$$

$$4z = \left[\sqrt{a}\,x + y/\sqrt{a} + b\right]^2$$

$$z = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a}\,x + y/\sqrt{a} + b\right)^2$$

وهو حل تام للمعادلة التفاضلية والحل العام هو

$$z = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a}\,x + y/\sqrt{a} + \varphi(a)\right)^2$$

وظيفة: أوجد الحل العام للمعادلات بطريقة تشارب

(1) $(p+q)(px+qy) = 0$

(2) $pq - px - qy = 0$

انتهت المحاضرة