القسم: رياضيات **السنة** الأولى **المحاضرة:** الرابعة **المادة:** تحليل متجهي عملي

الصفحات: (11) **التاريخ:** 13 / 9 / 2016 **الدكتورة:** ....

* عزم متجه بالنسبة لنقطة : u بالنسبة إلى O حيث A نقطة منه $\vec{OA} \wedge \vec{u}$

* عزم متجه u بالنسبة لمستقيم Δ حيث A نقطة من u و $\vec{u}$ شعاع توجيه Δ ، O نقطة من Δ $(\vec{u}, \vec{OA}, \vec{v})$

* عزم المتجه u بالنسبة للمتجه $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، حيث O نقطة من $\vec{u}$ و A نقطة من v $(\vec{u}, \vec{OA}, \vec{v})$

مثال : أوجد العزم النسبي بين الشعاعين $\vec{v}(2,1,-3)$ المار من النقطة $A(1,-3,0)$ و $\vec{v'}(1,-2,1)$ المار من النقطة $A'(0,0,1)$

الحل :

$A'A = (1,-3,1)$

$$(v', A'A, v) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

وهو متجه العزم. $(9+1) + 2(-3+2) + 1(1+6) = 15$

مثال : أوجد عزم الشعاع $\vec{v}(1,2,-1)$ المار بالنقطة $\vec{A}(2,1,0)$ بالنسبة للمستقيم المار بالنقطة $(1,-1,0)$ والموازي للشعاع $\vec{u} = (1,1,1)$

$(V, \Delta) = (\vec{u}, \vec{OA}, \vec{v})$

$|\vec{u}| = \sqrt{3}$

$\vec{OA} = (1,2,3)$

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$$

$$(\vec{V}, \Delta) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

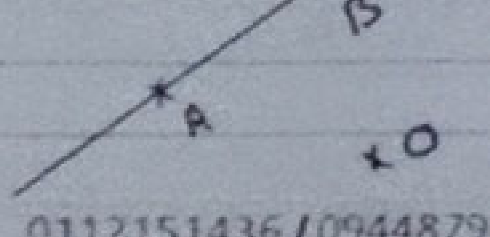
$$\frac{1}{\sqrt{3}}(-2-6) - \frac{1}{\sqrt{3}}(-1-3) + \frac{1}{\sqrt{3}}(2-2) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(-8) - \frac{1}{\sqrt{3}}(-4) + 0 =$$

$$\frac{-8}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{-4}{\sqrt{3}}$$

«المستقيم في الفراغ»

ليكن لدينا المستقيم الذي يمر من A و B والذي معادلته.



$$\vec{X}_L = \vec{OM} + \lambda(\vec{AB})$$

$$\overrightarrow{AM} = \lambda(\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \lambda(\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{X_L} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{AB})$$

بالتعويض حسب الإحداثيات.

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$$

أو تكتب معادلات المستقيم وسيطياً بالشكل:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \lambda$$

أو تكتب بالشكل:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

تمرين: أوجد معادلة المستقيم المار من $A=(2,1,0)$, $B=(-1,1,1)$ وهل

تنتمي النقطة "C" إلى المستقيم L . $C=(0,1,2)$

الحل:
$$\overrightarrow{X_L} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$$

$$\overrightarrow{X_L} = (2,1,0) + \lambda(-3,0,+1)$$

وهي معادلة المستقيم L

$$x = 2 - 3\lambda$$

$$y = 1$$

$$z = 0 + \lambda$$

تنتمي النقطة C إلى المستقيم إذا حققت إحداثياتها المعادلات

للمستقيم وكانت قيمة λ نفسها من جميع المعادلات

$* \; 0 = 2 - 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

$* \; 1 = 1 \qquad * \; z \Rightarrow 2 = \lambda$

ومنه C لا تنتمي لـ L

«الأوضاع المختلفة لمستقيمين»

$$\overrightarrow{X_{L_1}} = \overrightarrow{OA_1} + \lambda(\overrightarrow{A_1B_1})$$

$$\vec{X}_{L_2} = \vec{OA_2} + \mu(\vec{A_2B_2})$$

<u>الحل:</u>

$$\vec{X}_{L_1} = \vec{X}_{L_2}$$

$$\vec{OA_1} + \lambda(\vec{A_1B_1}) = \vec{OA_2} + \mu(\vec{A_2B_2})$$

$$x_1 + \lambda(x_{B_1} - x_{A_1}) = x_2 + \mu(x_{B_2} - x_{A_2})$$

$$y_1 + \lambda(y_{B_1} - y_{A_1}) = y_2 + \mu(y_{B_2} - y_{A_2})$$

$$z_1 + \lambda(z_{B_1} - z_{A_1}) = z_2 + \mu(z_{B_2} - z_{A_2})$$

وهي 3 معادلات بـ 2 مجاهيل (λ, μ)

<u>ملاحظة:</u> إذا كان المستقيمين متقاطعين أو منطبقين فالبعد بينهما $= 0 \Leftrightarrow d = 0$

قانون البعد للمستقيمين المتوازيين $d = \dfrac{|\vec{M_2M_1} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

قيمة مطلقة

قانون البعد للمستقيمين المتخالفين $d = \dfrac{|\vec{M_2M_1} \cdot \vec{L}|}{|\vec{L}|}$

طويلة

حيث $\vec{L} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

<u>مثال:</u> ادرس الوضع النسبي لكل زوج من المستقيمات التالية

ثم أوجد البعد بينهما:

$$\vec{X}_{L_1} = (-2,2,2) + \lambda(1,2,-1) \quad : \lambda \in R$$

$$\vec{X}_{L_2} = (-3,0,3) + \mu(2,4,-2) \quad : \mu \in R$$

$$\vec{X}_{L_1} = \vec{X}_{L_2}$$

الحل:

$$(1,2,-1)\lambda - (2,4,-2)\mu = (-3,0,3) - (-2,2,2)$$

$$(1,2,-1)\lambda - (2,4,-2)\mu = (-1,-2,1)$$

نشكل مصفوفة حيث يكون:

أمثال λ

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ +2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

عمود الثوابت (الحل)

أمثال μ مع إدخال إشارة (−)

$$-2R_1 + R_2 \to R_2 \,,\; R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

نلاحظ أن جميع المعادلات هي معادلة واحدة فقط

أي أنه لا عدد منتهٍ من الحلول $\lambda - 2\mu = 1$

فالمستقيمان منطبقان و البعد بينهما هو (0)

$\vec{X}_{L_1} = (2,1,0) + \lambda(3,4,2)$

$\vec{X}_{L_2} = (7,1,3) + \beta(3,4,2)$

$\lambda(3,4,2) - \beta(3,4,2) = (5,2,3)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 5 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{4}R_2 \to R_2$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} -3R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

بكتابة جملة المعادلات الخطية نلاحظ أن الجملة مستحيلة

الحل أو بطريقة ثانية ٢ = ٢ ، ٢ = ١

١ ≠ ٢

فهو مستحيلة الحل

المستقيمان إما متوازيين أو متطابقين يتم إيجادهما عن طريق

تتمة التوضيح

لدينا $\vec{u_1} = (3,4,2)$ شعاع توجيه للمستقيم d_1

و $\vec{u_2} = (3,4,2)$ ″ ″ ″ d_2

نلاحظ أن النسبة بينهما ثابتة $\vec{u_2} = \lambda \vec{u_1}$ أي هما

نستنتج أن المستقيمان متوازيان

نطبق القانون التالي: $d = \dfrac{|\overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{u_1}|}{|\vec{u_1}|}$

نوجد النقطتين M_1 و M_2 حيث M_1 تنتمي للمستقيم d_1

نعوض $t = 0$ نجد $M_1 = (2,-1,0)$

والنقطة M_2 تنتمي للمستقيم d_2 نعوض $t = 0$ $\Leftarrow$

$M_2 = (7,1,3)$

أصبح لدينا النقطتان M_1, M_2 نقوم بإيجاد $\overrightarrow{M_2M_1}$

من القانون السابق $\overrightarrow{M_2M_1} = (2-7, -1-1, 0-3)$

$\overrightarrow{M_2M_1} = (-5, -2, -3)$

ولدينا من d_1 $\vec{u_1} = (3,4,2)$

$|\vec{u_1}| = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$

$\cancel{\{\overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{v}\}}$

$$\overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + \vec{j} - 14\vec{k}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{v}| = \sqrt{64 + 1 + 196} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}$$

$$d = \frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 3$$ نعوض في القانون السابق

ادرس الوضع النسبي للمستقيمين المعادلة.

$$X_{L_1} = (9, -2, 0) + \lambda(4, -3, 1) \quad : \lambda \in R$$

$$X_{L_2} = (0, -7, 2) + \mu(-2, 9, 2)$$

$$\lambda(4, -3, 1) - \mu(-2, 9, 2) = -(9, -2, 0) + (0, -7, 2)$$

$$\lambda(4, -3, 1) - \mu(-2, 9, 2) = (-9, -5, 2)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & -9 \\ -3 & 9 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -9 \\ -3 & 9 & -5 \end{array}\right)$$

$R_2 \leftrightarrow R_1$

$$\begin{array}{l} 4R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & -17 \\ 0 & -15 & +[illegible] \end{array}\right)$$

$\frac{10}{15}R_2+R_3\to R_3$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{17}{15} \end{array}\right)$$

حل جملة المعادلات تجانس الجملة عن مسألة الحل نقدم لكتابة

أ ـ سنه التعجيب كي نعلم فيم إذا كانا مستويان أم متخالفان

لدينا $\vec{v}=(4,-3,1)$ ، $\vec{u}=(-2,9,2)$

نكتب النسب بينها

$$\frac{u}{v} = \frac{-2}{4} \neq \frac{9}{-3} \neq \frac{2}{1}$$

أي أنه لا يوجد ارتباط بينهما فالمستقيمان متخالفان.

• حساب البعد في حالة التخالف

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\vec{N}|}{|\vec{N}|}$$

حيث $\vec{N} = \vec{v}\wedge\vec{u}$

نوجد $M_1=(9,-2,0)$ $\quad M_2=(0,-7,2)$

بأن نفرض في L_1 ← $\lambda=0$ / في L_2 ← $\mu=0$

$$\overrightarrow{M_2M_1}=(9,5,-2)$$

$$N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = (-6-9)\vec{i}-(8+2)\vec{j}+(36-6)\vec{k}$$

$$= -15\vec{i}-10\vec{j}+30\vec{k}$$

$$|\vec{N}| = \sqrt{225+100+900} = \sqrt{1225}$$

نعوض في القانون التالي .

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_2M_1} \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|}$$

$$\overrightarrow{M_2M_1} \cdot \vec{N} = -135 - 50 - 60 = -245$$

$$= \frac{|-245|}{5\sqrt{59}} = \frac{245}{5\sqrt{59}} = 49$$

انتهت المحاضرة .