المحاضرة: الثالثة / القسم: رياضيات / المادة: تحليل متجهات (عملي)

- تمرين: لتكن الأشعة: $\vec{v}=(5,4,-1)$, $\vec{u}=(2,3,0)$

* احسب $|\vec{u}-\vec{v}|$ ثم قارنه مع $|\vec{v}|-|\vec{u}|$
* احسب $|\vec{v}+\vec{u}|$ ثم قارنه مع $|\vec{v}|+|\vec{u}|$

الحل:

- $|\vec{v}-\vec{u}|=\sqrt{21}-\sqrt{13}=4.5-3.6=0.9$
- $|\vec{v}-\vec{u}|\neq|\vec{v}|-|\vec{u}|$.
- $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{99}=9.9$
- $|\vec{u}|+|\vec{v}|=\sqrt{13}+\sqrt{42}=3.6+6.3=9.9$.

أي: يمكن توزيع القيمة المطلقة على الجمع لكن لا يمكن التوزيع على الطرح.

ملاحظة: هذا التمرين هو تتمة لتمرين من المحاضرة السابقة.

* أشعة الواحدة *.

لتكن $\vec{e}$ شعاع. نعرف شعاع واحدته $1=\vec{e}_0=\frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

* الجداء الخارجي لشعاعين *

لتكن لدينا $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin\theta$

الجداء الخارجي هو شعاع له نفس مبدأ الشعاعين و حامله عمودي على مستوي الشعاعين و جهته حيث تشكل الأشعة الثلاثة ثلاثية مباشرة $(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v})$

و يعرف كالتالي:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

ملاحظة: ينعدم الجداء الخارجي لشعاعين غير معدومين عندما يتوازى الشعاعين ويكون لما $\sin\theta = 0$ أي عندما $\theta = 0$ أو π

تمرين: إذا كان:

$$\vec{A} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{K}$$

$$\vec{M} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{K}$$

المطلوب: احسب شعاع الواحدة العمود على كل من M, A.

الحل: بداية نحسب الجداء الخارجي ثم نحسب طويلته.

$$\underbrace{\vec{A} \wedge \vec{M}}_{\text{شعاع عمودي على } \vec{A}, \vec{M}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{j} + 2\vec{K}$$

$$|\vec{A} \wedge \vec{M}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\vec{e}_{A\wedge M} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot (4\vec{j} + 2\vec{K}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{K}$$

تمرين: أوجد شعاع الواحدة العمود على المستوي المعين بالشعاعين:

$$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{K}$$

$$\vec{B} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{K}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{K}$$

$$|A \wedge B| = \sqrt{14} \Rightarrow e_{A\wedge B} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{K})$$

الجداء المختلط: لتكن لدينا الأشعة الثلاث التالية:

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2) . \vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \underbrace{(\vec{u} \wedge \vec{v})}_{\text{شعاع}} \times \underbrace{\vec{w}}_{\text{شعاع}}$$

عدد ← الناتج ←

$$= |\vec{u} \wedge \vec{v}| . |\vec{w}| . \cos\theta$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{مركبات } \vec{u} \\ \rightarrow \text{مركبات } \vec{v} \\ \rightarrow \text{مركبات } \vec{w} \end{matrix}$$

ملاحظة: الشرط اللازم والكافي لتكون 3 أشعة تقع في مستو واحد هو أن يكون جداؤها المختلط يساوي «0»

ملاحظة: نستخدم الجداء المختلط عندما يكون: ١- شعاعين متوازيين

٢- الأشعة تقع في مستو واحد

٣- عندما يكون سطرين في المحدد متشابه

تمرين: برهن أن النقاط:

$T(-4, 4, 4) \quad P(4, 5, 1) \quad Q(0, -1, -1) \quad S(3, 9, 4)$

تقع في مستو واحد...

الحل: نأخذ الجداء المختلط لثلاث أشعة

$$\vec{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P, z_Q - z_P) = -4\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{PT} = (-8\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{PS} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} \end{matrix}\right) \Rightarrow (\vec{PQ}, \vec{PT}, \vec{PS}) = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -8 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

مع ملاحظة: اجباري الناتج يكون (0) لأن النقاط في مستو واحد والسؤال برهن وليس احسب

انتهت المحاضرة