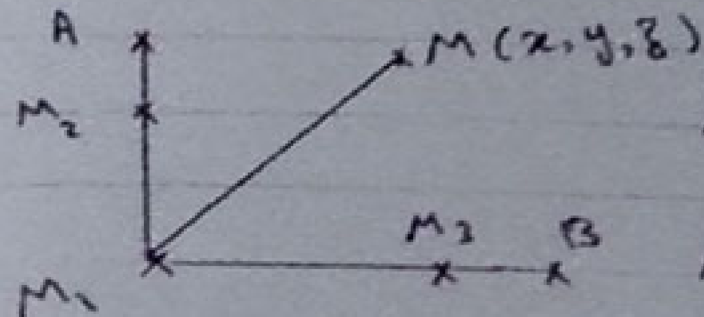

معادلة المستوي

لتكن لدينا النقاط $M_1=(x_1,y_1,z_1)$

$M_2(x_2,y_2,z_2)$ $M_3(x_3,y_3,z_3)$

X_0

$$\overrightarrow{X_E}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}$$

$$=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{M_1B}$$

$$\overrightarrow{X_E}=\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{M_1M_2}+\mu\overrightarrow{M_1M_3}$$

تمرين: أوجد معادلة المستوي المار بالنقاط

$$M_1=(2,3,1)\ ,\ M_2=(-1,5,0)\ .\ M_3=(0,1,-1)$$

ملاحظة: يشترط أن النقاط لا تقع على استقامة واحدة لأنه إذا وقعت في مستو واحد. يمر منه عدد غير منته من المستويات

الحل:

$$\overrightarrow{X_E}=\overrightarrow{OM_1}+\lambda\overrightarrow{M_1M_2}+\mu\overrightarrow{M_1M_3}$$

$$\overrightarrow{X_E}=(2,3,1)+\lambda(-3,2,-1)+\mu(-2,-2,-2)$$

وهي معادلة المستوي المطلوب.

نعيد وضع المستويين بالتالي :

$$\overrightarrow{X}_{E_1} = (2,0,0) + \lambda(1,1,1) + \mu(3,-1,1)$$

$$\overrightarrow{X}_{E_2} = (-\tfrac{5}{2},0,0) + \gamma(1,1,1) + \delta(0,1,2)$$

<u>الحل :</u>

$$\overrightarrow{X}_{E_1} = \overrightarrow{X}_{E_2}$$

$$\lambda(1,1,1) + \mu(3,-1,1) - \gamma(1,1,1) - \delta(0,1,2) = (-\tfrac{9}{2},0,0)$$

نكتب المصفوفة الموافقة :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$-R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$$

$$-R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -4 & 0 & -1 & \frac{9}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -2 & \frac{9}{2} \end{array}\right)$$

$$-\tfrac{1}{2} R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -4 & 0 & -1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{-9}{4} \end{array}\right)$$

$R_2 \longleftrightarrow R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{9}{4} \\ 0 & -4 & 0 & -1 & \frac{9}{2} \end{array}\right)$$

$4R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -\frac{9}{2} \end{array}\right)$$

نلاحظ أنه $\left.\begin{array}{l} n = 4 \\ r = 3 \\ r' = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow n - r = 1$

أي أنهما متقاطعان بمستقيم وهو الفصل المشترك.

نكتب المعادلات الموافقة للمجموعة:

$$\lambda + 3\mu - \delta = -\frac{9}{2}$$

$$\boxed{\mu - \delta = -\frac{9}{4}}$$

$$3\delta = \frac{-9}{2} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{-3}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{-3}{4}}$$

لنعوض النقاط من $\overrightarrow{X}_{E_1}$ معادلة المستوى الأول

$$\overrightarrow{X}_{E_1} = (2,0,0) + \lambda(1,1,1) - \frac{3}{4}(3,-1,1)$$

$$X_L = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right) + \lambda(1,1,1)$$

* ادرس وضع المستويين التاليين :

$$\overrightarrow{X}_{E_1} = (-2,1,0) + \lambda(2,-2,0) + \mu(3,-3,0)$$

$$\overrightarrow{X}_{E_2} = (-1,0,0) + \gamma(1,1,1) + \delta(-1,-1,-1)$$

الحل:

$$\overrightarrow{X}_{E_1} = \overrightarrow{X}_{E_2}$$

$$\lambda(2,-2,0) + \mu(3,-3,0) - \gamma(1,1,1) - \delta(-1,-1,-1) = (1,-1,0)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & +1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$+\frac{1}{2} R_2 \longrightarrow R_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$n = 4 \quad r = 2 \quad r' = 2$

$\Rightarrow n - r = 2 \Rightarrow$ متقاطعات مستوي

أي منطبقات

نكتب المعادلات الموافقة:

$$-\gamma + \delta = 0$$

$$2\lambda + 3\mu - \gamma + \delta = 1$$

$$0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \delta}$$

$$2\lambda + 3\mu - \gamma + \gamma = 1$$

$$2\lambda = -3\mu \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{3}{2}\mu}$$

أي أنه تم بإمكاننا كتابة المعادلات بدلالة مجهولين

اختياريين $\left(-\frac{3}{2}\mu, \mu, \gamma, \gamma\right)$

وظيفة: ادرس وضع المستويين التاليين:

$$\vec{X}_{E_1} = (-9,0,0) + \lambda(6,1,1) + \mu(13,2,2)$$

$$\vec{X}_{E_2} = (-7,1,1) + \lambda(2,1,0) + \mu(0,2,-1)$$

الناتج أن المستويين منطبقين.

ملاحظة: نقوم بتغيير المجهولين من $\vec{X}_{E_2}$ ونضع بدلاً من (λ و μ) ← (γ و δ). حتى يصبح لدينا 4 مجاهيل.

٢- أوضاع مستقيم ومستوي.

ادرس وضع المستقيم L مع المستوي E:

$$\vec{X}_{E_1} = (2,-1,3) + \lambda(0,1,0) + \mu(4,2,-1)$$

$$\vec{X}_{L} = (1,2,3) + \delta(2,0,2)$$

$$\vec{X}_{L} = \vec{X}_{E}$$

$$\lambda(0,1,0) + \mu(4,2,-1) - \delta(2,0,2) = (-1,3,0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$-4R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -1 \end{array}\right)$$

$$-10\,\delta = -1 \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{1}{10}}$$

$$\mu + 2\delta = 0$$

$$\mu = -2\delta \Rightarrow \boxed{\mu = -\frac{1}{5}}$$

$$\lambda + 2\left(-\frac{1}{5}\right) = 3 \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda = \frac{17}{5}}$$

لجملة المعادلات حل وحيد فالمستقيم يقطع المستوي فنعوض لنقطة التقاطع.

$$D = (1,2,3) + \frac{1}{10}(2,0,2)$$

$$D = (1,2,3) + \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$$

$$D = \left(\frac{6}{5}, 2, \frac{16}{5}\right)$$ وهي نقطة التقاطع

أثبت أن المستقيم

$$\vec{X}_L = (1,-2,0) + \delta(2,1,-3)$$

يقع في المستوى

$$\vec{X}_E = (2,0,0) + \lambda(0,1,1) + \mu(0,2,2)$$

الحل: م: يمكن حل هذا التمرين بطريقتين:

الطريقة الأولى: $\vec{X}_L = \vec{X}_E$

$$\delta(2,1,-3) - \lambda(0,1,1) - \mu(0,2,2) = (1,2,0)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$R_1 \longleftrightarrow R_2$

$-2R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$

$3R_1 + R_3 \longrightarrow R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & \\ 0 & 2 & 4 & \\ 0 & 2 & 4 & \end{array}\right)$$

لها عدد غير منته من الحلول

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r = r' = 2 < n = 3$

للجملة عدد غير منتهٍ من الحلول. إذا المستقيم يقع في المستوي

الطريقة الثانية: نعوض $\delta = 0 \Leftarrow$ النقطة $(1,-2,0)$

$\delta = 1 \Leftarrow (3,-1,-3)$

نعوض النقطة التي حصلنا عليها بدل $\vec{X}_E$ من معادلة المستوي حيث تنتج معادلتين لمجهولين هما (λ, μ)

$$(1,-2,0) = (2,0,0) + \lambda(0,1,1) + \mu(0,2,2)$$
$$(1,-2,0) - (2,0,0) = \lambda(0,1,1) + \mu(0,2,2)$$
$$(-1,-2,0) = \lambda(0,1,1) + \mu(0,2,2)$$
$$(3,-1,-3) = (2,0,0) + \lambda(0,1,1) + \mu(0,2,2)$$
$$(3,-1,-3) - (2,0,0) = \lambda(0,1,1) + \mu(0,2,2)$$
$$(1,-1,-3) = \lambda(0,1,1) + \mu(0,2,2)$$

أي أن المعادلتين هما...

$$(1,-1,-3) = \lambda(0,1,1) + \mu(0,2,2) \quad \ldots (1)$$
$$(-1,-2,0) = \lambda(0,1,1) + \mu(0,2,2) \quad \ldots (2)$$

نقول لجملة المعادلات حل مشترك

وظيفة ⇐

أ- نثبت أن المستقيم:

$$\vec{X}_L = (-1,2,-1) + \delta(2,2,1)$$

يقطع المستوي

$$\vec{X}_E = \left(\tfrac{1}{4},0,0\right) + \lambda\left(-\tfrac{3}{2},1,1\right) + \mu(1,0,-2)$$

ادرس وضع المستقيم مع المستوي.

$$\overrightarrow{X_L} = (-1,2,3) + \delta(3,6,4)$$

$$\overrightarrow{X_E} = (-\tfrac{7}{2},0,0) + \lambda(-\tfrac{11}{2},1,1) + \mu(-\tfrac{17}{2},-1$$

الحل:

$$\overrightarrow{X_E} = \overrightarrow{X_L}$$

$$\lambda(-\tfrac{11}{2},1,1) + \mu(-\tfrac{17}{2},-1,-1) - \delta(3,6,4) = (-1,2,3) - (-\tfrac{7}{2}$$

$$\lambda(-\tfrac{11}{2},1,1) + \mu(-\tfrac{17}{2},-1,-1) - \delta(3,6,4) = (3,2,3)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{11}{2} & -\frac{17}{2} & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$R_2 \leftrightarrow R_1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 2 \\ -\frac{11}{2} & -\frac{17}{2} & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$\frac{11}{2} R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \qquad -R_1 + R_3 \rightarrow R$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & -19 & -36 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$2\delta = 1 \Rightarrow \delta = \frac{1}{2}$

$-19\mu - 36\delta = -8 \Rightarrow -19\mu - \frac{36}{2} = -8$

$-19\mu - 18 = -8 \Rightarrow -19\mu = 10 \Rightarrow \mu = -\frac{10}{19}$

$\lambda - \mu - 6\delta = 2$

$\lambda + \frac{10}{19} - 6 \cdot \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow \lambda + \frac{10}{19} - 3 = 2$

$\lambda + \frac{10}{19} = 5 \Rightarrow \lambda = 5 - \frac{10}{19}$

أي أن حالة تقاطع.

تمرين:

- أثبت أن المستقيم

$\overrightarrow{X_L} = (-1, 2, 3) + \delta(3, 6, 4)$

يوازي المستوى

$\overrightarrow{X_E} = (-\frac{7}{2}, 0, 0) + \lambda(\frac{3}{2}, 1, 1) + \mu(-\frac{3}{2}, -1, \dots$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & -7 \\ 1 & -1 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$R_2 \leftrightarrow R_1$

$R_3 \leftrightarrow R_1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & -7 \end{array}\right)$$

11

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{array}\right)$$

$$-3R_2 + R_3 \longrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

مشكلة الحل أي أنها متناقضة

انتهت المحاضرة