القسم: رياضيات **السنة:** الأولى **المحاضرة:** السادسة

المادة: [illegible] **التاريخ:** 5/4/2012 **الدكتورة:** [illegible]

احسب بعد كل من النقاط عن المستوي :

$M_1 = (1,1,2)$ $\quad M_2 = (1,0,1)$ $\quad M_3 (1,2,5)$

عن المستوي $X_E = (1,0,1) + \lambda(2,1,0) + \mu(0,-1,-1)$

<u>الحل</u>: حساب بعد M_3 عن المستوي X_E .

$$d = \frac{\overrightarrow{MQ} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|}$$ قانون البعد

$Q = (1,0,1)$ من معادلة المستوي

$\overrightarrow{QM_3} = (0,2,4)$

حساب الناظم $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{N}$

$\vec{u} = (2,1,0)$

$\vec{v} = (0,-1,-1)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$= -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = (-1,2,-2)$

$$\Rightarrow d = \frac{(0,2,4)\cdot(-1,2,-2)}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$= \frac{4-8}{\sqrt{9}} = \frac{-4}{3}$$

من الإشارة ش النقطة M_3 تقع في الجهة المعاكسة لجهة الناظم

حساب بعد $M_2(1,0,1)$

$\overrightarrow{QM_2} = (0,0,0) \Rightarrow d = 0$

أي أن $M_2 \in E$

حساب بعد $M_1(1,1,-2)$

$\overrightarrow{QM_1} = (0,1,-3)$

$\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

$$\Rightarrow d = \frac{(0,1,-3)(-1,2,-2)}{\sqrt{9}} = \frac{2+6}{3} = \frac{8}{3}$$

أي أن النقطة M تقع في الإتجاه الموجب من الناظم

المنحنيات :

$f : [a.b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$t \longrightarrow f(t)$

حتى يكون منتهي
يجب أن يكون مستمر

طول المنحني $S(t) = \int_a^b f'(t) . dt$

شعاع واحدة المماس :

$$\vec{T}(s) = \frac{f'(t)}{|f'(t)|}$$

من علاقة $\vec{T}$ لدينا

$\vec{T}(s) = f'(s)$

متجه الناظم :

$$\vec{N} = \frac{|T'(t)|}{1}$$

$$\vec{N} = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

ثلاثية فرينيه تتشكل من الأشعة الثلاثة :

$$(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$$

المماس ، الناظم $\longrightarrow$ ثنائي الناظم

دستور فرينيه الأول :

$$\frac{dT}{ds} = \frac{N}{\rho}$$

$\rho \longrightarrow$ نصف قطر التقوس

$$\rho^{-1} = \frac{|T'(t)|}{S'(t)}$$

$$f''(t) = \underbrace{S''\vec{T}}_{\text{التسارع المماسي}} + \underbrace{S'^2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{N}}_{\text{التسارع الناظمي}}$$

أمثلة :

ليكن المنحني المعطى بالشكل :

$$f : [0,1] \longrightarrow (2t, t, 2t)$$

احسب $S(t)$ شعاع واحدة المماس بالنسبة لـ
$s \, , \, t$

احسب $\vec{N}$.

الحل:

$\forall \, t \in [0,1]$

$$S(t) = \int_0^t |\vec{f}'(t)| \, dt$$

$$\vec{f}'(t) = (2,1,2)$$

$$|\vec{f}'(t)| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$S(t) = \int_0^t 3 \, dt = [3t]_0^t$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{s}{3}}$$ التابع العام لطول المنحني

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{|\vec{f}'(t)|} = \frac{1}{3}(2,1,2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

الناظم $= 0$ لأن $\vec{T}$ ثابت.

لتكن المنحني :

$$f : [0,1] \longrightarrow (2, t, t^2)$$

- احسب $S(t)$ شعاع واحدة المماس بالنسبة لـ t, s
- احسب $\vec{N}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{T}$

احسب كلاً من المستوي المماسي والناظمي

الحل:

$\forall\, t \in [0,1]$

$$S(t) = \int_0^t |f'(t)|\, dt$$

$$f'(t) = (0, 1, 2t)$$

$$|f'(t)| = \sqrt{1+4t^2}$$

$\therefore \overline{N} = 0$ لأنه ثابت . $\vec{T}$

لتكن لدينا المنحنى المعطى بالشكل:

$$f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t : (3\cos t,\ 3\sin t,\ 3t)$$

① احسب $S(t)$, T شعاع واحدة المماس.

② أوجد $\overline{N}$, $\vec{B}$, f وطبق دساتير فرينيه الأول

③ أوجد كلاً من الفتل، والانحناء

الحل:

$\forall\, t \in [0, \pi]$

$$S(t) = \int_0^t |f'(t)|\, dt$$

$$f'(t) = (-3\sin t,\ +3\cos t,\ 3)$$

$$|f'(t)| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 9}$$

$$= \sqrt{9(\sin^2 t+\cos^2 t)+9} = \sqrt{9(1)+9}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S(t) = \int_0^t |f'(t)|\,dt$$

$$S = \int_0^t (3\sqrt{2})\,dt = 3\sqrt{2}\,t$$

$$\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{|f'(t)|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$t = \dfrac{s}{3\sqrt{2}} \Leftarrow s = 3\sqrt{2}\,t.$ نعوض

$$\vec{T}(s) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{3\sqrt{2}},\ \cos\frac{s}{3\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}(t)|} \qquad \circledast$$

$$\vec{T}'(t) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\cos t,\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin t,\ 0\right)$$

$$|T'(t)| = \sqrt{\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N} = (-\cos t,\ -\sin t,\ 0)$$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\vec{i} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2 t\right)\vec{k}$

$\vec{B} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

حساب نصف قطر التقوس ρ.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{T}'(t)|}{S'(t)}$$

$S(t) = 3\sqrt{2}\,t \Longrightarrow S'(t) = 3\sqrt{2}$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{6} \Rightarrow \rho = 6$$

تطبيق دساتير فرينيه الأول.

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\rho} \Rightarrow \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{6}(-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \left(-\frac{1}{6}\cos t, -\frac{1}{6}\sin t, 0\right)$$

التسارع المماسي

نعلم أن: $\vec{r}''(t) = S''\vec{T} + \frac{S'^2}{\rho}N$

$S(t) = 3\sqrt{2}\,t \Rightarrow 3\sqrt{2} = S'(t) \Rightarrow S''(t) = 0$

$\frac{S'^2(t)}{f} \Rightarrow S'(t) = 3\sqrt{2}\,t \Rightarrow$ التسارع الناظمي

$$S'(t) = 3\sqrt{2}$$

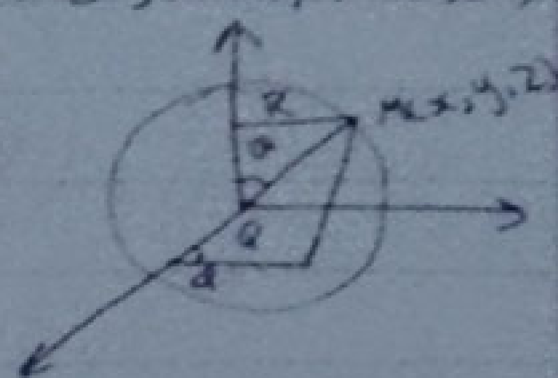
$$\frac{(3\sqrt{2})^2}{6} = \frac{9\times 2}{6} = 3$$

ملاحظة للاطلاع:

احسب طول مساحة الكرة:

$$f = (r\cos\theta\cos\alpha,\ r\sin\theta\sin\alpha,\ r\cos\theta)$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}}\left|f'(\theta,\alpha)\right|\,d\theta\,d\alpha$$



تكامل ثنائي
لأن الدالة تابعة
لوسيطين وهما
$(\theta,\ \alpha)$.

$R = r\sin\theta$

$x = r\sin\theta\cos\alpha$

$y = R\sin\alpha$

$= r\sin\theta\sin\alpha$

$z = r\cos\theta$

انتهت المحاضرة