المعادلات التفاضلية المتجانسة.

تعريف: نقول عن الدالة $f(x,y)$ في المتحولين x,y انها متجانسة من الدرجة n اذا حققت العلاقة التالية

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

حيث $\lambda \neq 0$

اذا كانت $n=0$ فنقول ان الدالة متجانسة من الدرجة صفر (متجانسة شكلياً)

مثال: اذا كان لدينا

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$$

متجانسة من الدرجة الثانية

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + 2\lambda^2 xy$$
$$= \lambda^2 (x^2 + y^2 + 2xy)$$

إذاً الدالة متجانسة من الدرجة الثانية

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية $y' = f(x,y)$ أنها متجانسة اذا كانت الدالة $f(x,y)$ متجانسة:

لإيجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة نردها إلى معادلة ذات متغيرات قابلة للفصل وذلك بإجراء التبديل $Z = \frac{y}{x}$.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

الحل: نتحقق اذا كانت متجانسة أم غير متجانسة

لدينا الدالة $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(x+y)}{\lambda(x-y)}$$

بما أن الدالة متجانسة فإن المعادلة التفاضلية متجانسة.

وبالتالي لإيجاد الحل العام نقسم على x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

نفرض $Z = \frac{y}{x} \Leftarrow$

$$y = Z.x$$

$$\Rightarrow y' = x.Z' + Z$$

$$xZ' + Z = \frac{1+Z}{1-Z}$$

$$xZ' = \frac{1+Z}{1-Z} - Z = \frac{1+Z-Z(1-Z)}{1-Z}$$

$$xZ' = \frac{1+\cancel{Z}-\cancel{Z}+Z^2}{1-Z} \Rightarrow xZ' = \frac{1+Z^2}{1-Z}$$

وهذه معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات

$$x.\frac{dz}{dx} = \frac{1+Z^2}{1-Z} \Rightarrow$$

نفصل المتحولات نجد:

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-Z}{1+Z^2}\,dZ$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{1+Z^2}\,dZ - \frac{Z}{1+Z^2}\,dZ$$

$$\ln|x| = \operatorname{arctg} Z - \frac{1}{2}\ln|1+Z^2| + \ln|c|$$

مثال أوجد الحل العام

$$xy' = x.e^{y/x} + y$$

الحل:

أولاً نتحقق إذا كانت متجانسة أم لا

لدينا الدالة

$$f(x,y)=\frac{x\cdot e^{y/x}+y}{x}$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda x\cdot e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}+\lambda y}{\lambda x}$$

من الدالة متجانسة فإن المعادلة التفاضلية متجانسة، وبالتالي يجاد الحل العام؟ لدينا

$$\frac{dy}{dx}=e^{y/x}+\frac{y}{x}$$

نفرض $Z=y/x$

$$\Rightarrow y=Z.x$$

$$\Rightarrow y'=x.Z'+Z$$

$$x.Z'+Z=e^{Z}+Z$$

$$xZ'=e^{Z}$$

مع كتابة هذا السطر بالإمكان

وهذه معادلة قابلة لفصل المتحولات من الدرجة الأولى

$$x.\frac{dZ}{dx}=e^{Z}$$

نفصل المتحولات

$$\frac{x}{dx}=\frac{e^{Z}}{dZ}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dZ}{e^{Z}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\ln|x|=-e^{-Z}+c$$

حيث c ثابت اختياري

المعادلات التفاضلية التي ترد إلى متجانسة:

توجد معادلات تفاضلية غير متجانسة ولإيجاد الحل العام لها نردها إلى معادلة تفاضلية متجانسة ومن ثم بإجراء تبديل معين نردها إلى معادلة تفاضلية ذات متحولات قابلة للفصل

من الحالات: ① المعادلة التفاضلية من الشكل

$$y' = f(ax+by+c)$$

هنا نجري التحويل

$$\boxed{\begin{aligned} Z &= ax+by+c \\ dZ &= a\,dx+b\,dy \end{aligned}}$$

مثال: $y' = (2x+y)^2$

الحل: نفرض $Z = 2x+y$

$$dZ = 2dx + dy$$

$$\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$$

بالتعويض بالمعادلة

$$\frac{dz}{dx} = 2 + Z^2$$

قابلة لفصل المتحولات

$$dx = \frac{dZ}{2+Z^2}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{Z}{\sqrt{2}}}$$

② المعادلة التفاضلية من الشكل

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

نلاحظ هنا أن

$$D_1 = ax+by+c$$

$$D_2 = a_1x+b_1y+c_1$$

مستقيمان واقعان في المستوي xoy

نميز هنا عدة حالات:

1 إذا كان $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\lambda$ بهذه الحالة يكون لدينا D_1 ينطبق على D_2

وبالتالي تصبح المعادلة على الشكل التالي

$$y'=f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=f(x) \Rightarrow dy=f(x).dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y=x.f(x)+c}$$ الحل العام. حيث c ثابت التكامل

2 إذا كان $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\lambda \neq \frac{c}{c_1}$ بهذه الحالة يكون $D_1 // D_2$

عندئذ نجري التحويل $Z=\frac{y}{x}$

3 إذا كان $\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$ بهذه الحالة يكون D_1 و D_2 متقاطعان

بهذه الحالة نوجد نقطة التقاطع

نفرض نقطة التقاطع بين D_1 و D_2 هي (α,β) ونجري (استبدال) التحويل التالي

$$\begin{cases} x=X+\alpha \\ y=Y+\beta \end{cases} \quad , y'=Y'$$

بعد التعويض بالمعادلة التفاضلية نجري التبديل $Z=\frac{Y}{X}$

مثال: أوجد الحل العام:

$$(x+y+1)dx-(2x+2y+2)dy=0$$

الحل $(x+y+1)dx-2(x+y+1)dy=0$ بالإخراج ع.م

نقسم على $x+y+1$

$$dx-2dy=0 \Rightarrow dx=2dy \Rightarrow$$

$$dy=\frac{1}{2}dx$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2}x+c}$$

مثال: أوجد الحل العام

$$y' = \frac{3x - y + 5}{x + y - 1}$$

الحل.

المستقيمان متقاطعان لأن $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{1}$

نوجد نقطة التقاطع بحل المعادلتين $3x - y + 5 = 0$

$x + y - 1 = 0$

نجمع $4x + 4 = 0 \Leftarrow \boxed{x = -1}$ بالتعويض في إحدى المعادلتين

نجد $\boxed{y = 2}$

نجري التحويل

$$\text{نجد} \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 2 \\ y' = Y' \end{cases}$$

$$Y' = \frac{3X - 3 - Y - 2 + 5}{X - 1 + Y + 2 - 1} = \frac{3X - Y}{X + Y}$$

معادلة متجانسة بالتقسيم على X نجد

$$Y' = \frac{3 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$$

نجري التحويل $Z = \frac{Y}{X}$ نجد $Y = Z \cdot X \Leftarrow$

$$Y' = Z + XZ'$$

نعوض

$$Z + XZ' = \frac{3 - Z}{1 + Z}$$

$$XZ' = \frac{3 - Z}{1 + Z} - Z = \frac{3 - Z - Z - Z^2}{1 + Z}$$

$$\Rightarrow XZ' = \frac{3 - 2Z - Z^2}{1 + Z}$$

معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{x} = \frac{1+Z}{3-2Z-Z^2}\, dZ$$

بالمكاملة نحصل على الحل العام

مثال

$$(x-y+1)\,dx + (x-y+2)\,dy = 0$$

الحل:

$y_1 = \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{2}$ <= متوازيان

$$Z = x-y$$

$$dZ = dx - dy \Rightarrow$$

$$dy = dx - dZ$$

$$(Z+1)\,dx + (Z+2)(dx - dZ) = 0$$

$$Z\,dx + dx + Z\,dx - Z\,dZ + 2\,dx - 2\,dZ = 0$$

$$(Z+1+Z+2)\,dx + (-Z-2)\,dZ = 0$$

$$(2Z+3)\,dx - (2+Z)\,dZ = 0$$

يجب إكمال الحل:

تمارين "ذهنية":

1- $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$

2- $2yxy' = x^2 + y^2$

3- $(x+y-2)\,dx + (x-y+4)\,dy = 0$