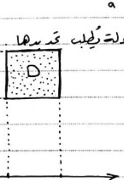
★ تعريف [1]: ندعو كل معادلة من الشكل: $\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(x,t).\psi(t)\, dt$ .... (1)

معادلة تكاملية حيث:



[a,b] فترة معطاة ، $\psi(x)$ دالة معرفة على هذا المجال و هي مجهولة يُطلب تحديدها.

λ: وسيط ثابت قد يكون حقيقياً أو عقدياً.

$h(x)$: هي دالة معلومة معطاة على المجال [a,b]

$K(x,t)$: تدعى نواة المعادلة التكاملية وهي دالة معرفة على المربع $D=[a,b]\times[a,b]$.

وذلك حيث $a,b>0$.

- إن الدوال K, h, ψ هي دوال حقيقية أو عقدية.

الدالة $h(x)$ تكتب بالشكل: $h(x) = \psi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\psi(t)\, dt$

★ تعريف [2]: نقول عن الدالة $\psi(t)$ أنها «كمولة تربيعياً» على المجال المغلق [a,b] إذا تحقق الشرط:

$$\int_a^b |\psi(t)|^2\, dt < \infty$$

★ تعريف [3]: نقول عن النواة $K(x,t)$ أنها «كمولة تربيعياً» على المربع D إذا تحققت الشروط الثلاثة:

① $\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\, dx\, dt < \infty$

② $\int_a^b |K(x,t)|^2\, dx < \infty \quad ; \quad \forall\, t \in [a,b]$

③ $\int_a^b |K(x,t)|\, dt < \infty \quad ; \quad \forall\, x \in [a,b]$

★ الأنواع الرئيسية للمعادلة التكاملية:

- النوع الأول: «معادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني» وهي من الشكل:

$$\psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b K(x,t).\psi(t)\, dt$$

- أما معادلة فريدهولم التكاملية الخطية المتجانسة هي

عندما تكون $h(x)=0$ أي أنها من الشكل: $\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t).\psi(t)\, dt = 0$

وكلمة «خطية» تعني أن العمليات التي تخضع لها الدالة المجهولة هي عمليات خطية ،

Subject / /

مثال: معادلة غير خطية لأن $\Psi(t)$ من الدرجة الثانية.
$$\Psi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} k(x,t) \cdot [\Psi(t)]^2 = 0$$

- النوع الثاني: « معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني » ولها الشكل:
$$\Psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\, \Psi(t)\, dt$$

- أخيراً تجدر الإشارة إلى أن نواة المعادلة التكاملية تتمتع بالصفة التناظرية:
أي أن:
$$k(x,t) = k(t,x)$$

(*) الحالة العامة: سنبحث في حل معادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني:
سنستخدم طريقة «التقريبات المتتالية» في الوصول إلى حل هذه المعادلة فارضين أن:
النواة $k(x,t)$ كمولة تربيعياً على المربع $D=[a,b]\times[a,b]$ وأن $\Psi(t)$ كمولة تربيعياً على $[a,b]$.

- نفرض في الطرف الأيمن من المعادلة (1) أن $\Psi(t)=0$ نحصل على التقريب الأول: $\Psi_0(x)=h(x)$

- نعوض هذا التقريب في معادلة فريدهولم (1) نحصل على التقريب الثاني:
$$\Psi_1(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \underbrace{\Psi_0(t)}_{h(t)}\, dt$$

- نعوض هذا التقريب في معادلة فريدهولم (1) فنجد التقريب الثالث:
$$\Psi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \Psi_1(t)\, dt$$
حيث: $\Psi_1(t) = h(t) + \lambda \int_a^b k(t,z)\, \underbrace{\Psi_0(z)}_{h(z)}\, dz$ حيث جعلنا $x \to t \quad t \to z$
(بدلنا كل x بـ t وكل t بـ z)

نعوض $\Psi_1(t)$ في معادلة $\Psi_2(x)$ نجد:
$$\Psi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\left[h(t) + \lambda \int_a^b k(t,z)\, \Psi_0(z)\, dz\right] dt$$

بفك الأقواس نجد:
$$\Psi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot h(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t) \int_a^b k(t,z)\, \Psi_0(z)\, dz\, dt$$

$$\Psi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, h(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b k(x,t)\, dt \int_a^b k(t,z)\, \Psi_0(z)\, dz$$

الآن لندخل المصطلحات الآتية :

$$K_1(x,t)=K(x,t)$$

$$K_2(x,t)=\int_a^b K_1(x,z)\,K_1(z,t)\,dz$$

$$K_3(x,t)=\int_a^b K_1(x,z)\,K_2(z,t)\,dz$$

$$\vdots$$

$$K_m(x,t)=\int_a^b K_1(x,z)\,K_{m-1}(z,t)\,dz$$

$$\psi_2(x)=h(x)+\lambda\int_a^b k(x,t)\,h(t)\,dt+\underbrace{\lambda^2\int_a^b k(x,t)\Big[\int_a^b k(t,z)\,h(z)\,dz\Big]dt}_{(\star)}$$

$$\text{in } (\star):\ t\longrightarrow z\ ,\ z\longrightarrow t \Rightarrow (\star):\ \lambda^2\int_a^b k(x,z)\Big[\int_a^b k(z,t)\,h(t)\,dt\Big]dz$$

$$\Rightarrow \lambda^2\int_a^b\!\!\int_a^b \underbrace{k(x,z)\,k(z,t)}_{K_2(x,t)}.\,h(t)\,dt\,dz \Rightarrow \lambda^2\int_a^b K_2(x,t).\,h(t)\,dt \quad --\ (\star)$$

نعوض $(\star)$ في $\psi_2(x)$:

$$\Rightarrow \psi_2(x)=h(x)+\lambda\int_a^b k(x,t).\,h(t)\,dt+\lambda^2\int_a^b K_2(x,t)\,h(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \psi_3(x)=h(x)+\cdots\cdots+\lambda^3\int_a^b K_3(x,t)\,h(t)\,dt\,.$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \psi_n(x)=h(x)+\sum_{m=1}^{n}\lambda^m\int_a^b K_m(x,t)\,h(t)\,dt$$

حيث : $K_m(x,t)$: النوى المتكررة في m .

ـ نفرض أن المتسلسلة في الطرف الأيمن متقاربة بانتظام، وكما نعلم أن التقارب المنتظم للانتقال إلى التكاملية . أي بأخذ تكاملية الطرفين نجد :

متسلسلة نيومن

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=\psi(x)=h(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^m\int_a^b K_m(x,t)\,h(t)\,dt$$

Subject / /

بالعودة إلى التقريبات الآن: نجد أنه $\Psi_2(x)$ يكتب بالشكل:

وهو التقريب الثالث :

$$\Psi_2(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \left[h(t) + \lambda \int_a^b k(t,z) \cdot h(z)\, dz\right] dt$$

بتعويض هذا التقريب :

$$\Psi_3(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot \Psi_2(t)\, dt \quad \longrightarrow \quad \text{التقريب الرابع}$$

$\vdots$

$$\Psi_{n+1}(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot \Psi_n(t)\, dt \quad \longrightarrow \quad \text{التقريب } n+1$$

وبالتالي حصلنا على متتالية من الدوال $\Psi_{n+1}(x)$

إذا كانت هذه المتتالية متقاربة على المجال $[a,b]$ وبأخذ النهاية للطرفين :

$$\lim_{n \to \infty} \Psi_{n+1}(t) = \Psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \cdot \Psi(t)\, dt$$

وهذه النهاية تمثل حلاً لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني .