المحاضرة ٩ :

ليكن: $y = f(x)$ تابع معرف بالجدول التالي :

تابع معرف بشكل نقطي

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_n

لتطبيق لاغرانج على الأقل يجب أن يكون موجود ثلاث نقاط

نعرف حدوديات لاغرانج على الشكل:

أول خطوة: إيجاد حدوديات لاغرانج (حدودية من الدرجة n)

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

لما كتبت L_0 بالبسط ما كتبت الـ x_0 بينما بالمقام بـ x_0

بينما L_1 نلغي بالبسط الـ x_1 ونكتب x_0 والـ x_2 وهكذا

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$\vdots$

المقام لا يجب أن يساوي الصفر

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

نلاحظ أن حدوديات لاغرانج هي حدوديات من الدرجة n وتحقق:

$$\forall i,j \in \{0,1,2,\dots n\} : L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

مثلاً

$$L_1(x_0) = \frac{(x_0-x_0)(x_0-x_2)\cdots}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots} = 0$$

$$L_1(x_1) = \frac{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = 1$$

وبالتالي تكون حدودية الاستيفاء بطريقة لاغرانج على الشكل التالي:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \cdot f(x_i)}$$

للحفظ

$P_n(x_i) = f(x_i) : i = 0, 1, 2, \dots n$: حيث تحقق

تمرين: باستخدام طريقة لاغرانج أوجد حدودية الاستيفاء الملائمة للتابع $y=f(x)$ الموصوف بالجدول:

x	-1	2	3
$y=f(x)$	1	3	4

الحل: نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{(-3)(-4)}$$

$$\boxed{L_0(x) = \frac{1}{12}(x^2-5x+6)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(3)(-1)}$$

$$\boxed{L_1(x) = \frac{-1}{3}(x^2-2x-3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(4)(1)}$$

$$\boxed{L_2(x) = \frac{1}{4}(x^2-x-2)}$$

فتكون حدودية الاستيفاء حسب لاغرانج

$$P_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2)$$

$$= \frac{1}{12}(x^2 - 5x + 6) - \frac{3}{3}(x^2 - 2x - 3) + \frac{4}{4}(x^2 - x - 2)$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_2(x) = \frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x + \frac{3}{2}}$$

حدودية الاستيفاء

تمرين (2): باستخدام طريقة لاغرانج أوجد حدودية الاستيفاء للتابع $y = f(x)$ المعرف بالجدول

x	-2	0	1	2
$y = f(x)$	-3	1	0	5

الحل: نوجد حدوديات لاغرانج:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$= \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(-2)(-3)(-4)}$$

$$= \frac{-1}{24} x (x - 1)(x - 2)$$

$$\boxed{L_0(x) = \frac{-1}{24}(x^3 - 3x^2 + 2x)}$$

التاريخ: / /

الموضوع:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(2)(-1)(-2)}$$

$$\boxed{L_1(x) = \frac{1}{4}(x^3 - x^2 - 4x + 4)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$= \frac{(x+2)(x)(x-2)}{(3)(+1)(-1)} = \frac{-1}{3}(x^3 - 4x)$$

$$\boxed{L_2(x) = \frac{1}{-3}(x^3 - 4x)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$= \frac{(x+2)(x)(x-1)}{(4)(2)(1)}$$

$$\boxed{L_3(x) = \frac{1}{8}(x^3 + x^2 - 2x)}$$

$$P_3(x) = L_0 y_0 + L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3$$

$$= \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 + 2x) + \frac{2}{8}(x^3 - x^2 - 4x + 4)$$

$$+ \frac{5}{8} - (x^3 + x^2 - 2x)$$

$$\boxed{P_3(x) = x^3 - 2x + 1}$$

وظيفة : أوجد حدودية الاستيفاء للتابع $y = f(x)$ الموف
بالجدول

x	0	1	2	4
	-3	0	11	81

بالطريقة العامة ثم طريقة لاغرانج