مثال : استخدم النواة المترددة في حل المعادلة التكاملية الآتية :

$$\Psi(x) = \cos x + \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} (x^2 \cos t + x \sin t)\, \Psi(t)\, dt$$

الحل : وجدنا في المحاضرة السابقة أنه :

الدوال $a_k(x)$ والدوال $b_k(t)$ مستقلة خطياً وأن النواة $K(x,t)$ كمولة تربيعياً

إن صيغة الحل لهذه المعادلة تعطى بالشكل :

$$\Psi(x) = h(x) + \lambda c_1 a_1(x) + \lambda c_2 a_2(x) \quad \dots (*)$$

- لإيجاد المجاهيل c_1 و c_2 يجب أن نحسب h_1, h_2 و $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$:

$$h_1 = \int_a^b b_1(t)\, h(t)\, dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos t \cdot \cos t \, dt = \pi$$

$$h_2 = \int_a^b b_2(t)\, h(t)\, dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin t \cdot \cos t \, dt = 0$$

"تكامل تابع بشقه في مجال متناظر = 0"

$$a_{11} = \int_a^b b_1(t)\, a_1(t)\, dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos t \cdot t^2 \, dt = 4\pi$$

$$a_{12} = \int_a^b b_1(t)\, a_2(t)\, dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos t \cdot t \, dt = 0$$

$$a_{21} = \int_a^b b_2(t)\, a_1(t)\, dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin t \cdot t^2 \, dt = 0$$

$$a_{22} = \int_{-\pi}^{+\pi} b_2(t)\, a_2(t)\, dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin t \cdot t \, dt = 2\pi$$

- نأخذ جملة المعادلات الجبرية الخطية :

$$\begin{cases} (1-\lambda a_{11})\, c_1 - \lambda a_{12}\, c_2 = h_1 \\ -\lambda a_{21}\, c_1 + (1-\lambda a_{22})\, c_2 = h_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-4\pi\lambda)\, c_1 = \pi \\ (1-2\pi\lambda)\, c_2 = 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Subject .... / /

- نحسب محدد الأمثال ونجعله مساوياً للصفر:

$\Delta(\lambda) = (1-4\pi\lambda)(1-2\pi\lambda) = 0$

وهي القيم المميزة $\lambda_1 = \frac{1}{2\pi}$, $\lambda_2 = \frac{1}{4\pi}$

المناقشة:

$\boxed{1}$: $\lambda \neq \lambda_2$ و $\lambda \neq \lambda_1$ نعوض في جملة المعادلات:

$C_1 = \frac{\pi}{1-4\pi\lambda}$, $C_2 = 0$

- نعوض في صيغة الحل $(*)$:

$$\boxed{\Psi(x) = \cos x + \frac{4\pi}{1-4\pi\lambda} x^2}$$

$\boxed{2}$ $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2\pi}$ نعوض في جملة المعادلات:

$$\begin{cases} (1-4\pi\cdot\frac{1}{2\pi})\, C_1 = \pi \\ (1-2\pi\cdot\frac{1}{2\pi})\, C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-2)\, C_1 = \pi \\ 0\cdot C_2 = 0 \end{cases}$$

إذاً $C_2 = A$ كيفي , $C_1 = -\pi$

نعوض في صيغة الحل $(*)$: $\Psi(x) = \cos x - \frac{\pi}{2\pi} x^2 + \boxed{\frac{A}{2\pi}}\, x$

$$\boxed{\Psi(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} + A_1 x}$$

$\boxed{3}$ $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{4\pi}$ نعوض في جملة المعادلات:

$$\begin{cases} 0\cdot C_1 = \pi \quad (\text{مستحيلة}) \\ (1+\frac{1}{2})\, C_2 = 0 \end{cases}$$

«لا يوجد حل في هذه الحالة»

Scanned by CamScanner

Subject / /

- لنتابع الآن الدراسة النظرية في إيجاد حل معادلة فريدهولم المتجانسة باستخدام النواة المترددية:

$$\Psi(x)=\lambda\sum_{1}^{n} c_k a_k(x)$$

إن الدوال:

$$\Psi_1(x)=\lambda\sum_{1}^{n} c_k^{(1)} a_k(x)$$

$$\Psi_2(x)=\lambda\sum_{1}^{n} c_k^{(2)} a_k(x)$$

$\vdots$

$$\Psi_p(x)=\lambda\sum_{1}^{n} c_k^{(p)} a_k(x)$$

هذه الدوال تشكل حلولاً لمعادلة فريدهولم المتجانسة.

وإذا فرضنا المتجهات الآتية: $\vec{c}^{(1)}, \vec{c}^{(2)}, \vec{c}^{(3)}, \ldots, \vec{c}^{(p)}$ مستقلة خطياً

هذا يعني بدوره أن الدوال $\Psi_1(x), \Psi_2(x), \Psi_3(x), \ldots, \Psi_p(x)$ مستقلة فيما بينها والعكس صحيح

- وفي هذه الحالة يكون الحل العام لمعادلة فريدهولم المتجانسة تركيب خطي من الحلول:

$$\boxed{\Psi(x)=e_1\Psi_1(x)+e_2\Psi_2(x)+e_3\Psi_3(x)+\cdots+e_p\Psi_p(x)}$$

- إثبات صحة الاستقلال الخطي: "موجود في الكتاب صفحة (43)"

- مناقشة الحالة التي يكون فيها $h(x)\neq 0$ و $\Delta(\lambda)=0$ وهذا يدعونا للحديث عن:

☒ المعادلة التكاملية المنقولة:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(t,x)\,\varphi(t)\,dt$$

وهي نفس معادلة فريدهولم والاختلاف هو أن النواة $k(x,t)$ أصبحت $k(t,x)$

مثال: إن المعادلة:

$$\varphi(x)=\sin x+\lambda\int_0^1 (t-x)\,\varphi(t)\,dt$$

هي منقول المعادلة:

$$\Psi(x)=x+\lambda\int_0^1 (x-t)\,\Psi(t)\,dt$$

وفي حال $f(x)=0$ نحصل على المعادلة المنقولة المتجانسة:

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b k(t,x)\,\varphi(t)\,dt$$

Scanned by CamScanner

- إذا كانت النواة $K(t,x)$ متردية أي أنه :

$$K(t,x)=\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,.\,b_k(x)$$

- نعوض في المعادلة المنقولة :

$$\varphi(x)=\ell(x)+\lambda\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,b_k(x)\right)\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi(x)=\ell(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\int_a a_k(t)\,.\,\varphi(t)\,dt$$

$$\varphi(x)=\ell(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k\,.\,b_k(x) \qquad \text{where :}\quad c_k=\int_a^b a_k(t)\,.\,\varphi(t)\,dt$$

بجعل $x\to t$:

$$\varphi(t)=\ell(t)+\lambda\sum_{k=1}^{n} c_k\,.\,b_k(t)$$

نعوض هذه العلاقة في عبارة C_K السابقة : و بجعل $k\to m$ في $\varphi(t)$:

$$c_k=\int_a^b a_k(t)\left[\ell(t)+\lambda\sum_{m=1}^{n} c_m\,b_m(t)\right]dt$$

نفك الأقواس :

$$c_k=\int_a^b a_k(t)\,\ell(t)\,dt+\lambda\int_a^b a_k(t)\sum_{m=1}^{n} c_m\,b_m(t)\,dt \quad ;\quad k=\overline{1,n} \quad m=\overline{1,n}$$

$$c_k=\int_a^b a_k(t)\,\ell(t)\,dt+\lambda\sum_{m=1}^{n} c_m\int_a^b a_k(t)\,.\,b_m(t)\,dt$$

$$c_k=\ell_k+\lambda\sum_{m=1}^{n} c_m\,a_{km}$$

where :

$$\ell_k=\int_a^b a_k(t)\,.\,\ell(t)\,dt$$

((احفظوا الاستنتاج))

$$a_{km}=\int_a^b a_k(t)\,.\,b_m(t)\,dt$$

- نبدل في عبارة C_K كل K بـ m وكل m بـ K :

$$c_m-\lambda\sum_{k=1}^{n} a_{mk}\,c_k=\ell_m$$

- نستنتج أن حل المعادلة التكاملية المنقولة عندما تكون النواة متردية مكافئ تماماً لحل جملة المعادلات الجبرية الخطية غير المتجانسة الموجودة في المحاضرة السابقة.

Scanned by CamScanner

Subject

- وهذا يعني بدوره أنه معين الأمثال لجملة المعادلات الأخيرة يساوي معين الأمثال لجملة المعادلات غير المتجانسة التي درست في المحاضرة السابقة.

- وكذلك نجد أن القيم المميزة للنواة $k(x,t)$ تساوي القيم المميزة للنواة $k(t,x)$.

- ينتج مما سبق أنه إذا كان للمعادلة فريدهولوم غير المتجانسة حلاً وحيداً فإن للمعادلة المنقولة حل وحيد أيضاً.

- في حال كانت جملة المعادلات متجانسة أي $l_m = 0$ عندئذ يكون الجملة المعادلات:

$$\sum_{m=1}^{n} (\delta_{km} - \lambda a_{km}) c_m = 0 \quad ; \quad \delta_{km} = \begin{cases} 1 & \text{if } k=m \\ 0 & \text{if } k \neq m \end{cases}$$

- عندئذ يكون لهذه الجملة حلاً غير الحل الصفري.

- وإذا فرضنا أنه $E'(\lambda)$ هو فضاء الحل الجملة المعادلات الجبرية الخطية المتعلقة بالمعادلة المنقولة عندئذ يكون بعد الفضاء $E'(\lambda)$ مساوياً البعد الفضاء $E(\lambda)$ فضاء الحل الجملة المعادلات المتجانسة المتعلقة بمعادلة فريدهولوم المتجانسة.

- فإذا فرضنا أنه: $\vec{c}^{(m)} = c_1^{(m)}, c_2^{(m)}, \dots, c_n^{(m)}$ قاعدة للفضاء $E'(\lambda)$

- عندئذ يعطينا كل حل من هذه الحلول بتعويضه في المعادلة الموافقة المتجانسة لنجد:

$$\varphi^{(m)}(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k^{(m)} \cdot b_k(x) \quad ; \quad m = \overline{1,p}$$

- إذاً لدينا $\varphi^{(m)}(x)$ حلاً للمعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة المنقولة.

- إنه الحلول $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \dots, \varphi^{(p)}(x)$ هي دوال مستقلة خطياً ويؤكد من ذلك تشكل قاعدة لفضاء حلول هذه المعادلة.

- نعلم أنه الشرط اللازم والكافي لحل جملة المعادلات غير المتجانسة المذكورة في المحاضرة السابقة في حالة معين الأمثال مساوٍ للصفر هو أنه يكون المتجه $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ متعامداً مع جميع المتجهات $\vec{c}^{(m)}$ وحيث $m = 1, 2, \dots, p$ أي أنه الجداء السلمي $= 0$:

$$\vec{h} \cdot \vec{c}^{(m)} = 0 \quad ; \quad m = \overline{1,p}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} h_k \cdot c_k^{(m)} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b b_k(t) \cdot h(t) \; c_k^{(m)} \, dt = 0$$

Scanned by CamScanner

Subject / /

نضرب الطرفين بـ λ :

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^b b_k(t)\, h(t)\, c_k^{(m)}\, dt = 0$$

$$\int_a^b \left[\lambda \sum_{k=1}^{n} c_k^{(m)}\, b_k(t)\right] h(t)\, dt = 0$$

$$\int_a^b \varphi^{(m)}(t)\, h(t)\, dt = 0 \qquad \text{«شرط التعامد»} \qquad (*)$$

في حال تحقق الشروط (*) عندئذ يكون لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني حل وحيد وسندرس كيفية إيجاد هذا الحل.

- نفرض أنه يوجد حل خاص لمعادلة فريدهولم وليكن $\Psi_0(x)$ ولنجر التحويل الآتي:

$$\Psi(x) = \Psi_0(x) + \overline{\Psi}_1(x)$$

نعوض في معادلة فريدهولم:

$$\Psi_0(x) + \overline{\Psi}_1(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\left[\Psi_0(t) + \overline{\Psi}_1(t)\right] dt$$

$$\Psi_0(x) + \overline{\Psi}_1(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \Psi_0(t)\, dt + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \overline{\Psi}_1(t)\, dt$$

$$\Psi_0(x) + \overline{\Psi}_1(x) = \Psi_0(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \overline{\Psi}_1(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \overline{\Psi}_1(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\, \overline{\Psi}_1(t)\, dt$$

ونلاحظ أن هذه المعادلة شكل معادلة فريدهولم لكنها متجانسة ومحل Ψ هو $\overline{\Psi}_1$.

إذاً الحل العام لمعادلة فريدهولم غير المتجانسة هو حل خاص Ψ_0 مضافاً إليه $\Psi_1(x)$ والحل العام لمعادلة $\overline{\Psi}_1(x)$ السابقة هو تركيب خطي لمجموعة من الحلول المستقلة خطياً $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_p$ أي أن:

$$\overline{\Psi}_1 = e_1\Psi_1 + e_2\Psi_2 + \dots + e_p\Psi_p$$

وعلى ضوء كل ما سبق يمكن صياغة نص مبرهنة فريدهولم بالشكل الآتي:

سؤال دورة «اذكر نص مبرهنة فريدهولم»

Scanned by CamScanner

Subject .... / /

1 إذا لم تكن λ قيمة مميزة للنواة $K(x,t)$ عندئذ يكون للمعادلة التكاملية المتجانسة والمنقولة الحل الصفري فقط.

ويكون للمعادلة فريدهولم غير المتجانسة والمنقولة حلاً وحيداً.

2 إذا كانت λ قيمة مميزة للنواة $K(x,t)$ فإن لمعادلة فريدهولم المتجانسة حلولاً غير الحل الصفري، وهذه الحلول تشكل فضاءً ذا بُعد منتهٍ، كما يكون للمنقول هذه المعادلة المتجانسة حلولاً غير الحل الصفري أيضاً، وهذه الحلول أيضاً تشكل فضاءً ذا بُعد منتهٍ.

وإذا كانت $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots, \psi^{(p)}$ قاعدة لمجموعة الحل الأولى

وكانت $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots, \varphi^{(p)}$ قاعدة لمجموعة الحل الثانية

عندئذ يكون الشرط اللازم والكافي كي يكون لمعادلة فريدهولم غير المتجانسة حلاً هو أن يتحقق شرط التعامد (*)

ويكون الحل العام هو حل خاص مضافاً إليه حل عام للمعادلة المتجانسة الموافقة لها

وإذا لم تتحقق الشروط (*) فالمعادلة مستحيلة الحل.

Scanned by CamScanner