المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى:

منشأ المعادلات التفاضلية:

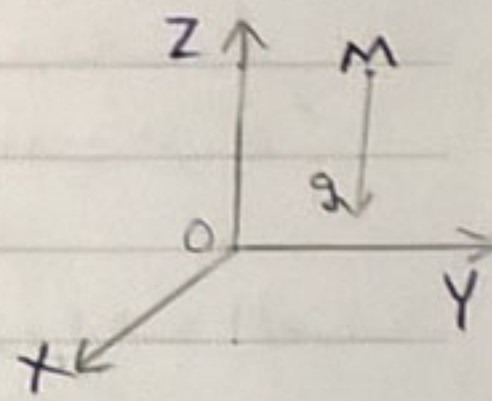
- منشأ هندسي: كثير من الخواص التي تحققها منحنيات ما أو مجموعة منحنيات عكس التغير عنها معادلة تفاضلية من نتوسر أو معادلة ناظم.
- منشأ ميكانيكي: خروج الميكانيك من حركة وتحريك وتوازن ملية بالمعادلات التفاضلية، وبالتالي إذا افترضنا أنه لدينا نقطة مادية $M(x,y,z)$ تتحرك في المجلة الإحداثية $OXYZ$، حيث oZ شاقولي صاعد فيها. وكانت مركبات القوة المؤثرة عليها على الشكل التالي

مركبات القوة

$$X : mx'' = 0$$
$$Y : my'' = 0$$
$$Z : mz'' = -mg$$

"حيث m كتلة النقطة المادية"

"g الجاذبة الأرضية / الثقل"، وضعنا إشارة $(-)$ لأنه



عاكس المعادلات التفاضلية بإحركة النقطة "للطلب إيجادها" oZ شاقولي صاعد.

للحصول على المعادلات الحركية، نكامل العلاقات السابقة حيث

$$mx' = c_1 \Rightarrow mx = c_1 t + c_4$$
$$my' = c_2 \Rightarrow my = c_2 t + c_5$$
$$mz' = -mgt + c_3 \Rightarrow mz = -\frac{1}{2} mgt^2 + c_3 t + c_6$$

- منشأ المعادلات التفاضلية من طريق حذف الثوابت: نلاحظ كذلك على أن حذف الثوابت الاختيارية يتم بإيجاد علاقات لهذه الثوابت، ومن ثم نحذفها

مثال: "ليكن حذف n ثابت اختياري يؤدي لإيجاد n معادلة تفاضلية"

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3$$

نأخذ مشتقاته

ALMABIB.net

$$y' = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} + 0$$
$$y'' = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$
$$y''' = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x}$$

نلاحظ أن $y' = y'''$

$$\Rightarrow \boxed{y = y'' + C}$$

---

* المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى:

هذه المعادلات لها الشكل التالي:

$$F(x, y, y') = 0$$

نجد المتغير x والدالة y و y'

تكتب على الشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

نميز ثلاث حالات:

① الدالة التابعة لـ x فقط وتكتب على الشكل التالي

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)$$

وبالتالي يكون الحل العام لها من الشكل التالي

$$dy = f(x)\,dx$$

بالمكاملة ⇐

$$\boxed{y = \int f(x)\,dx + C}$$ ⇐ الحل العام للمعادلة التفاضلية

② الدالة التابعة لـ y فقط، وتكتب على الشكل التالي

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(y)$$

وبالتالي يكون لدينا $\frac{dy}{f(y)} = dx$ $\xRightarrow{\text{بالمكاملة}}$ $\boxed{x = \int \frac{dy}{f(y)} + C}$

الحل العام للمعادلة التفاضلية

ALAUIB.net

③ إذا كانت الدالة $f(x,y)$ على الشكل الآتي

$$f(x,y) = f(x).\ f(y)$$

$\Leftarrow$ يكون لدينا

$$\frac{dy}{dx} = f(x).\ f(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{f(y)} = f(x).\ dx}$$

وصلنا للمتحولات وبالمكاملة نحصل على الحل العام.

علامة اليسار الأصلي تابعة لـ x،
والطرف الآخر تابع لـ y.

- هذه المعادلة من الحالة الثالثة، معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى، قابلة للفصل المتحولات.

- إذاً بشكل عام المعادلة التفاضلية القابلة لفصل المتحولات لها الشكل

$$\boxed{P(x).dx + Q(y)\,dy = 0}$$

حيث P, Q "دوال"

وبالمكاملة نحصل على الحل العام.

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = 3x^2 y$$

الحل: معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى قابلة للفصل

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 y$$

$$\frac{dy}{y} = 3x^2.\ dx \quad \text{بالمكاملة} \Rightarrow$$

$$\ln(y) = x^3 + C \Rightarrow y = e^{x^3+C}$$

ALMATID.net
صنو الحضارة

/ /

تذكير: قانون جمع مرا:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^2+1)(y^2-1)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

الحل:

نقسم على $x(y^2-1) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{(x^2+1)}{x}\,dx + \frac{2y}{y^2-1}\,dy = 0$$

بالمكاملة

$$\tfrac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \ln|y^2-1| = \ln|C|$$

وضعنا $\ln|C|$ لأنه أغلب الحدود $\ln$

مثال: أوجد الحل العام

الحل: من الرتبة الأولى

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow$$ بالمكاملة

$$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} C$$

$$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+C}{1-Cx}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{x+C}{1-Cx}$$

ALADIB.net

مثال) اوجد الحل العام

$y' = 2\sqrt{y}$

الحل

معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى تامة لعدم المتغيرات

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \quad ; y \neq 0$$

بالمكاملة

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C$$

$$x + C = \sqrt{y}$$

$$y = x^2 + 2Cx + C^2$$

مثال) أوجد الحل العام

$xy' - y = 0$

الحل

$$xy' = y$$

$$y' = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$ بالمكاملة

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|y| - \ln|c| = \ln|x|$$

مثال) أوجد الحل العام

$e^{x+y}\,dy = e^{-2x}\,dx$

الحل

$$e^x \cdot e^y \cdot dy = e^{-2x} \cdot dx$$

$$e^y \cdot dy = \frac{e^{-2x}}{e^x} \cdot dx$$

$$e^y \cdot dy = e^{-3x}\,dx$$

$$e^y = \frac{e^{-3x}}{-3} + e^c$$

LAVID.net

صنو الحضارة

تعريف: الحل العام للمعادلة التفاضلية من المرتبة n (بشكل عام) هو كل حل على الشكل الآتي

الحل العام
$$y = y(x)$$

أو

يسمى بالحل الضمني للمعادلة التفاضلية
$$F(x, y) = 0$$

أو

الحل الوسيطي
$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

وبالتالي يكون لدينا

$$y = y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$
$$F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$
$$x = x(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$$
$$y = y(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

الحل الخاص: هو حل للمعادلة التفاضلية خلية من الثوابت سواء كان هذا الحل (وسيطي/ضمني/عام)

* حل ① $2x \sin y \, dx + (x^2+3)\cos y \, dy = 0$

أوجد الحل الخاص المار بالنقطة (الضمني) $m(1, \frac{\pi}{2})$

الحل نوجد الحل العام ثم نعوض

الحل الشاذ: هو الحل الذي لا ينتظم من الثوابت وصيغة الحل.

---

* حل الحل: نقسم المعادلة ① على: $(x^2+3)\sin y \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{2x \sin y}{(x^2+3)\sin y} dx + \frac{(x^2+3)\cos y}{(x^2+3)\sin y} dy = 0$$

$$\frac{2x}{x^2+3} dx + \frac{\cos y}{\sin y} dy = 0$$

معادلة ذات متحولات قابلة للفصل