★ النواة الحالّة : ندعو المجموع الآتي :

$$K_1(x,t)+\lambda K_2(x,t)+\lambda^2 K_3(x,t)+\dots+\lambda^{m-1}K_m(x,t)+\dots = R(x,t,\lambda)$$

- يُعبّر عن مجموع المتسلسلة السابقة بالرمز $R(x,t,\lambda)$ وتُدعى "النواة الحالّة لـ $K(x,t)$"

- دراسة تقارب النواة الحالة :

نعلم أنّ :
$$K_m(x,t)=\int_a^b K_{m-1}(x,z)\,K_1(z,t)\,dz$$

نربع الطرفين ونطبق متراجحة شفارتز :

$$|K_m(x,t)|^2 \leq \int_a^b |K_{m-1}(x,z)|^2 dz \cdot \int_a^b |K_1(z,t)|^2 dz$$

$$\text{but: } C_{m-1}^2 = \sup \int_a^b |K_{m-1}(x,z)|^2 dz$$

$$|K_m(x,t)|^2 \leq C_{m-1}^2 \cdot C_0^2 \quad \text{---} \quad (*)$$

- وجدنا سابقاً أنّ :

$$C_m^2 \leq C_{m-1}^2 B^2 \leq C_{m-2}^2 B^4 \leq C_{m-3}^2 B^6 \leq \dots \leq C_1^2 B^{2m-2}$$

$$\Rightarrow C_{m-1}^2 B^2 \leq C_1^2 \cdot B^{2(m-1)}$$

"نقسم على B^2 حيث $B^2 \neq 0$"

$$C_{m-1}^2 \leq C_1^2 \cdot B^{2(m-2)} \quad ; \quad B^2 \neq 0$$

بالعودة إلى (*) :
$$|K_m(x,t)|^2 \leq C_1^2 \cdot C_0^2 \cdot B^{2m-4}$$

بالجذر :
$$K_m(x,t) \leq C_1 \cdot C_0 \cdot B^{m-2} \quad \text{---} \quad (**)$$

$$|\underbrace{\lambda^{m-1} K_m(x,t)}| \leq |\lambda|^{m-1} \cdot C_1 \cdot C_0 \cdot B^{m-2}$$

"الحد العام للنواة الحالة"
$$\leq |\lambda|^{m-1} \cdot C_1 \cdot C_0 \cdot B^{-1} \cdot B^{m-1}$$

$$|\lambda^{m-1} k_m(x,t)| \leq \frac{C_1 C_0}{B}[|\lambda|.B]^{m-1}$$

وهي متسلسلة هندسية أساسها $|\lambda|B$

متكون متقاربة وفق الشرط $|\lambda| < \frac{1}{B}$

إذاً حسب فايرشتراس تكون المتسلسلة السابقة متقاربة بانتظام و R تحليلية على القرص $D(0,\frac{1}{B})$

$\boxed{\star}$ استنتاج صيغ الحل للمعادلة التكاملية باستخدام النواة الحالّة : نعلم أنه

$$R(x,t,\lambda) = k_1(x,t) + \lambda k_2(x,t) + \lambda^2 k_3(x,t) + \lambda^3 k_4(x,t) + \dots + \lambda^{m-1}. k_m(x,t) + \dots$$

- نضرب جميع الحدود بالنواة $k(z,x)$:

$$k(z,x).R(x,t,\lambda) = k(z,x)k_1(x,t) + \lambda k(z,x)k_2(x,t) + \lambda^2 k(z,x)k_3(x,t) +$$
$$+\lambda^3 k(z,x)k_4(x,t) + \dots + \lambda^{m-1} k(z,x)k_m(x,t) + \dots$$

- نكامل ونضرب جميع الحدود بـ λ :

$$\lambda\int_a^b k(z,x)R(x,t,\lambda)\,dx = \lambda\int_a^b k(z,x)k_1(x,t)\,dx + \lambda^2\int_a^b k(z,x)k_2(x,t)\,dx$$
$$+\lambda^3\int_a^b k(z,x)k_3(x,t)\,dx + \dots + \lambda^m\int_a^b k(z,x)k_m(x,t)\,dx + \dots$$

- وحسب ~~xxxx~~ المعطيات يكون :

$$\lambda\int_a^b k(z,x)R(x,t,\lambda)\,dx = \lambda k_2(z,t) + \lambda^2 k_3(z,t) + \lambda^3 k_4(z,t) + \dots + \lambda^m k_{m+1}(z,t) + \dots$$

$$\Rightarrow \lambda\int_a^b k(z,x).R(x,t,\lambda)\,dx = R(z,t,\lambda) - k(z,t)$$

where : $R(z,t,\lambda) = k(z,t) + \lambda\int_a^b k(z,x).R(x,t,\lambda)\,dx$

$z \to x \wedge x \to z$

$$R(x,t,\lambda) = k(x,t) + \lambda\int_a^b k(x,z).R(z,t,\lambda)\,dz$$

وهي من شكل

معادلة فريدهولم

★ استنتاج صيغة معادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني باستخدام النواة الحالة:

نعلم أن:
$$\Psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\,\Psi(t)\,dt$$

or: $$\frac{\Psi(x)-h(x)}{\lambda} = \int_a^b k(x,t)\,\Psi(t)\,dt \quad \text{---} \quad (*)$$

we have: $$R(x,t,\lambda) = k(x,t) + \lambda \int_a^b k(z,t)\,R(x,z,\lambda)\,dz$$

$$k(x,t) = R(x,t,\lambda) - \lambda \int_a^b k(z,t)\,R(x,z,\lambda)\,dz \quad \text{---} \quad (**)$$

نعوض (**) في (*):
$$\frac{\Psi(x)-h(x)}{\lambda} = \int_a^b \left(R(x,t,\lambda) - \lambda \int_a^b k(z,t)\,R(x,z,\lambda)\,dz\right)\Psi(t)\,dt$$

نفك الأقواس:
$$\frac{\Psi(x)-h(x)}{\lambda} = \int_a^b R(x,t,\lambda)\,\Psi(t)\,dt - \lambda \int_a^b\int_a^b k(z,t)\,R(x,z,\lambda)\,dz\,dt$$

$$= \int_a^b R(x,t,\lambda)\,\Psi(t)\,dt - \lambda \int_a^b R(x,z,\lambda) \underbrace{\int_a^b k(z,t)\,\Psi(t)\,dz\,dt}$$

استناداً إلى (*):
$$= \int_a^b R(x,t,\lambda)\,\Psi(t)\,dt - \lambda \int_a^b R(x,z,\lambda)\left[\frac{\Psi(z)-h(z)}{\lambda}\right]dz$$

$$= \int_a^b R(x,t,\lambda)\,\Psi(t)\,dt - \int_a^b R(x,z,\lambda)\,\Psi(z)\,dz + \int_a^b R(x,z,\lambda)\,h(z)\,dz$$

$t \to z$: (فقط في الحد الأول والثاني)
$$= \int_a^b R(x,z,\lambda)\,\Psi(t)\,dt - \int_a^b R(x,z,\lambda)\,\Psi(t)\,dt + \int_a^b R(x,z,\lambda)\,h(z)\,d(z).$$

$$\Rightarrow \frac{\Psi(x)-h(x)}{\lambda} = \int_a^b R(x,z,\lambda)\,h(z)\,dz \Rightarrow \Psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b R(x,z,\lambda)\,h(z)\,dz$$

$z \to t$:

$$\Psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)\,h(t)\,dt$$

وهي صيغة الحل باستخدام النواة الحالة

مثال (1) : استخدم نواة حالة في إيجاد حل معادلة فريدهولم التكاملية الخطية الآتية :

$$\psi(x) = x + \lambda \int_0^1 x t \, \psi(t)\, dt \quad ; \quad |\lambda| < \frac{1}{B}$$

الحل :

أولاً نحسب النوى المكررة :

$$K_1(x,t) = K(x,t) = xt$$

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,z)\, K(z,t) = \int_a^b (x.z)(z.t)\, dz = \frac{1}{3} x.t$$

$$K_3(x,t) = \int_a^b K_1(x,z)\, K_2(z,t)\, dz = \int_0^1 (x.z)\left(\frac{1}{3} z t\right) dz = \frac{1}{3} x.t \int_0^1 z^2\, dz = \frac{1}{3^2} x.t$$

$$\vdots$$

$$K_m(x,t) = \frac{1}{3^{m-1}} x.t$$

نعوض في عبارة النواة الحالة :

$$R(x,t,\lambda) = K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \cdots$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x,t)\, \lambda^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^{m-1}} x.t\, \lambda^{m-1} = x.t \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{m-1} ; \left|\frac{\lambda}{3}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \quad R(x,t,\lambda) = \frac{3xt}{3-\lambda} \quad ; \quad |\lambda| < 3$$

عبارة الحل :

$$\psi(x) = x + \lambda \int_0^1 \frac{3xt}{3-\lambda}\, t\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x) = \frac{3x}{3-\lambda} \quad ; \quad \lambda \neq 3}$$

مثال (2) : استخدم نواة حالة في إيجاد حل لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية الآتية :

$$\psi(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \frac{x}{1+t^2}\, \psi(t)\, dt$$

Subject .... / /

الحل : أولاً : شرط التقارب :

$B^2 = \frac{\pi+2}{24}$; $|\lambda| < \frac{1}{B}$; $\lambda = \frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{\frac{6}{\pi+2}} > \frac{2}{\ln 2}$

$K_1 = K = \frac{x}{1+t^2}$

$K_2 = \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{x}{1+t^2}$

$K_3 = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2 \cdot \frac{x}{1+t^2}$

$\vdots$

$K_m = \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^{m-1} \cdot \frac{x}{1+t^2}$

$R = \frac{2x}{1+t^2}$

$\psi(x) = 1 + x^2 + \frac{2x}{\ln 2}$ الجواب النهائي

Scanned by CamScanner