مثال - ١ - أوجد الحل العام

$$y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$$

معادلة تفاضلية متجانسة

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \tan\frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda f(x,y)$$

$$Z = \frac{y}{x}$$

$$y = Zx \Rightarrow y' = Z + xZ'$$

$$y' = Z + \tan Z$$

$$Z + xZ' = Z + \tan Z$$

$$xZ' = \tan Z$$

$$x\frac{dZ}{dx} = \tan Z$$

معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dx}{x} = \frac{dZ}{\tan Z}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dZ}{\frac{\sin Z}{\cos Z}}$$

$$\ln|x| = \ln|\sin Z| + \ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{x}{c}\right| = \ln|\sin Z|$$

$$\frac{x}{c} = |\sin Z|$$

$$x = c_1 |\sin Z|$$

$$\sin Z = \frac{x}{c}$$

$$Z = y/x \Rightarrow \frac{x}{c} = \sin\frac{y}{x}$$

$$\arcsin\frac{x}{c} = y/x$$

$$(\qquad\qquad) = y/x$$

$$y = x(\qquad\qquad)$$

2_ مثال: أوجد الحل العام

$$2yxy' = x^2 + y^2$$

الحل: نقسم على x^2

$$\frac{2yxy'}{x^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2}$$

$$2\frac{y}{x}y' = 1 + \frac{y^2}{x^2} \quad \text{①}$$

نفرض أن

$$Z = \frac{y}{x}$$

$$y = Zx \Rightarrow y' = Z + Z'x$$

نعوض في ①

$$2Z(Z + Z'x) = 1 + Z^2$$

$$2Z^2 + 2ZZ'x = 1 + Z^2$$

$$2ZZ'x = 1 + Z^2 - 2Z^2$$

تابع

$$\boxed{2ZZ'x = 1 - Z^2}$$

العملي

ج٢٢ح الأربعاء 1 ← 2

ج٢١ح الأحد 5 ← 6

تعريف: نقول عن المعادلة التفاضلية أنها خطية إذا كانت على الصورة

$$y' + P(x)y = q(x)$$

حيث $P(x), q(x)$ هي دوال مستمرة وقابلة للاشتقاق ومعرفة في مجال ما وليكن $[a,b]$

تعريف: نقول عن المعادلة $y' + P(x)y = 0$ أنها خطية متجانسة (أو بدون طرف ثاني). $q(x)=0$

أما المعادلة $y' + P(x)y = q(x)$ معادلة تفاضلية غير متجانسة (أو مع طرف ثاني) $q(x) \neq 0$

لإيجاد الحل العام:

① نوجد الحل العام للمعادلة المتجانسة بدون طرف ثاني.

لدينا:

$$y' + P(x)\, y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)\, y$$

$$dy = -P(x)\, y\, dx$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\, dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)\, dx + \ln|c|$$

$$\ln|y| - \ln|c| = -\int P(x)\, dx$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int P(x)\, dx$$

$$\frac{y}{c} = e^{-\int P(x)\, dx}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية بدون طرف ثاني

$$y = c\, e^{-\int P(x)\, dx}$$

② إيجاد حل خاص للمعادلة التفاضلية مع طرف ثان.

لإيجاد ذلك نفرض أن الثابت c متحول تابع لـ x أي $c = c(x)$ مع

$$y_1 = c(x)\, e^{-\int P(x)\, dx}$$

بالاشتقاق

$$y_1' = c'(x)\, e^{-\int P(x)\, dx} - c(x) P(x)\, e^{-\int P(x)\, dx}$$

نعوض في المعادلة مع طرف ثاني

$$c'(x)\, e^{-\int P(x)\, dx} - c(x) \cancel{P(x)}\, e^{-\int P(x)\, dx} + c(x) P(x)\, e^{-\int P(x)\, dx} = q(x)$$

الحدين يختصروا مع بعضها « لأنه إذا ما اختصروا نغلط »

$$c'(x)\, e^{-\int P(x)\, dx} = q(x)$$

$$c'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}$$

$$\boxed{c = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx + c_1}$$

نعوض في الحل الخاص y_1 لإيجاد قيمة الـ c

ويكون الحل العام هو

$$\boxed{Y = y + y_1}$$