المحاضرة الثالثة

طريقة تنصيف المجال: وهي طريقة تقريبية للحصول على مجال طوله صغير جداً ولتكن ε "حسب الدقة المطلوبة" يحوي جذر للمعادلة المطلوبة وهي على الشكل التالي:

- ليكن $f(x)$ تابع مستمر على المجال $[a,b]$ حيث $f(a).f(b)<0$ ولنفرض أن $f(a)<0$; $f(b)>0$
وليكن α جذر للمعادلة في المجال $[a,b]$

نقوم بتنصيف المجال $[a,b]$ وليكن $x_1 = \frac{a+b}{2}$ فينتصف المجال عندئذ نميز الحالات التالية:

1- إذا كان $f(x)=0$ عندئذ $x_1 = \alpha$ وهو المطلوب

2- إذا كان $f(x)>0$ عندئذ $\alpha \in [a, x_1]$

3- إذا كان $f(x)<0$ عندئذ $\alpha \in [x_1, b]$

نكرر هذه العملية حتى نحصل على مجال طوله صغير جداً أصغر من الدقة المطلوبة ε

الموضوع:

تمرين (1): باستخدام طريقة تنصيف المجال أوجد جذراً تقريبياً للمعادلة

$f(x) = x^3 - 9x + 1 = 0$ في المجال $[2, 4]$

بدقة $\varepsilon = 0,05$

معادلة حدودية درجة 3 إيجاد جذر

الحل: نلاحظ أن $f(4) = 27 > 0$ ، $f(2) = -9 < 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[2, 4]$

وليكن α

منتصف المجال $\boxed{x_1 = \frac{2+4}{2} = 3}$ ، $f(x_1) = 1 > 0$

$\Longrightarrow \alpha \in [2, 3]$

$\boxed{x_2 = \frac{2+3}{2} = 2,5}$ ، $f(x_2) = -5.875 < 0$

$\Longrightarrow \alpha \in [2.5, 3]$

$\boxed{x_3 = \frac{2.5+3}{2} = 2.75}$ ، $f(x_3) = -2.9531 < 0$

$\Longrightarrow \alpha \in [2.75, 3]$

$\boxed{x_4 = \frac{2.75+3}{2} = 2.875}$ ، $f(x_4) = -1,1113 < 0$

$\Longrightarrow \alpha \in [2.875, 3]$

$\boxed{x_5 = \frac{2.875+3}{2} = 2,9375}$ ، $f(x_5) = -0.09 < 0$

$\Longrightarrow \alpha \in [2.9375, 3]$

$$x_6 = \frac{2.9375 + 3}{2} = 2.9687$$

$$f(x_6) = 0{,}4453 > 0$$

$$\Longrightarrow \alpha \in [2.9375 , 2.9687]$$

نلاحظ أن $|x_6 - x_5| = 0{,}0312 < 3$

ومنه $\boxed{\alpha \simeq x_6 = 2.9687}$

ملاحظة: هذه الاشارة $\simeq$ مهمة جداً كتابتها

تمرين 2: باستخدام طريقة تنصيف المجال أوجد الجذر التقريبي للمعادلة: $f(x) = 3x + \sin x - e^x$ في المجال $[1, 2]$

بدقة $\varepsilon = 0{,}075$

الحل: نلاحظ أن: $f(1) = 1.231 > 0$ ، $f(2) = -0.4797$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[1, 2]$

$\boxed{\text{وليكن } \alpha}$

يجب تسميتها في البداية

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x)=0$ في المجال

$[1,2]$ وليكن α

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5 \ , \ f(x_1) = 1.0158$$

$$\Longrightarrow \alpha \in [1.5 , 2]$$

$$\boxed{x_2 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75} \ , \ f(x_2) = 0.4793 > 0$$

$$\Longrightarrow \alpha \in [1.75 , 2]$$

$$\boxed{x_3 = \frac{1.75+2}{2} = 1.875} \ , \ f(x_3) = 0.0582 > 0$$

$$\Longrightarrow \alpha \in [1.875 , 2]$$

$$\boxed{x_4 = \frac{1.875+2}{2} = 1.9375} \ , \ f(x_4) = 0.1953$$

$$\Longrightarrow \alpha \in [1.875 , 1.9375]$$

نلاحظ أن :

$$|x_4 - x_3| = 0,0625 < \varepsilon$$

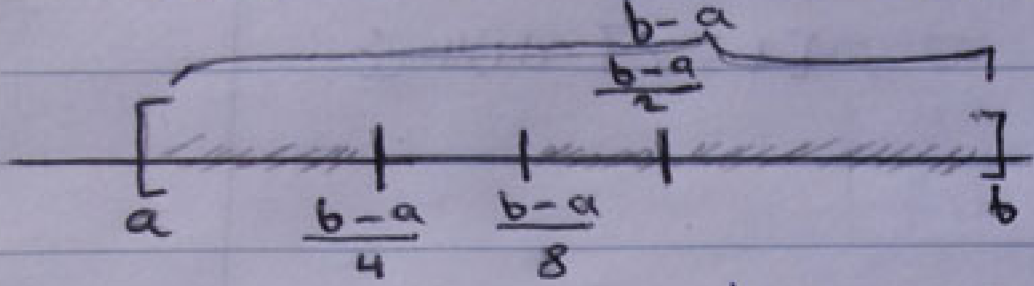
ومنه :

$$\boxed{\alpha \simeq x_4 = 1.9375}$$

- تقدير الخطأ المرتكب بطريقة تنصيف المجال :

بفرض α جذر فعلي للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a,b]$

وليكن x_n منتصف المجال الذي حصل عليه بعد n خطوة منتصف



عندئذ: $|x_n - x_{n-1}| = \frac{b-a}{2^n}$

ومنه: $|x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$

أي أن بعد x_n عن α أصغر من الدقة المطلوبة

تمرين 3: باستخدام طريقة تنصيف المجال أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = \cos x - 2x = 0$ في المجال $[0,1]$ بدقة $\varepsilon = 0.04$

الحل: نلاحظ أن $f(1) = -1.4596 < 0$ ، $f(0) = 1 > 0$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[0,1]$ وليكن α

$$x_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5 \text{ , } f(x_1) = -0.1224 < 0 \longrightarrow \alpha \in [0, 0.5]$$

$$x_2 = \frac{0+0.5}{2} = 0.25 = 0.4689 > 0$$

$$\longrightarrow \alpha \in [0.25, 0.5]$$

التتمة وظيفة

وظيفة: باستخدام طريقة تنصيف المجال أوجد جذر تقريبي للمعادلة:

$$f(x) = x - 4\ln x = 0$$

في المجال $[1,2]$ بدقة $\varepsilon = 0{,}02$