المحاضرة (2) :

الشكل العام للمعادلات: بفرض $f(x)$ تابع بالمتحول x
عندئذ الشكل العام للمعادلات كما يلي ، $f(x)=0$

وهي نوعان: 1- معادلات جذرية (حدودية) وهي من الشكل:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a = 0$$

2- معادلات متسامية: وهي التي تحوي على دوال
متسامية (cos , sin , ln ...)

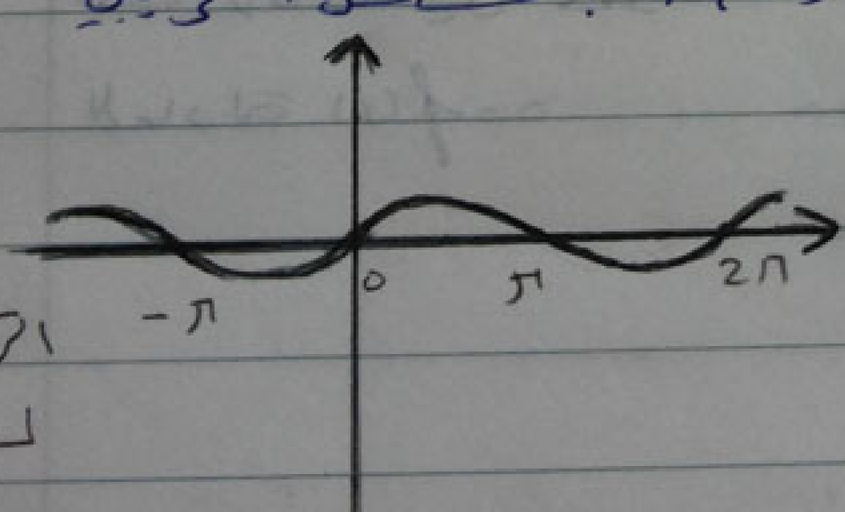
> **ملاحظة:** $y=f(x)$ تسمى علاقة التابع
> أما $y=f(x)=0$ تسمى معادلة

تعريف: بفرض $f(x)=0$ معادلة عندئذ نقول عن $\alpha \in \mathbb{R}$ أنه
جذر للمعادلة السابقة إذا تحقق $f(\alpha)=0$

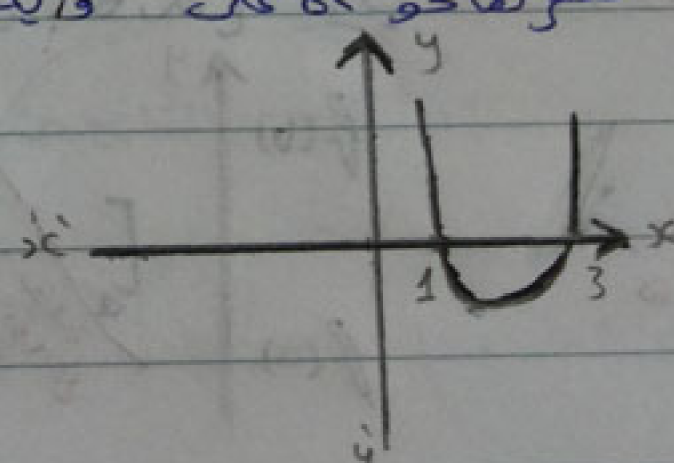
مثال $f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$ معادلة حدودية

تقبل الجذور : $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

وهي معادلة من الدرجة الثانية قطع مكافئ أمثال الـ x^2 موجبة
تفتح نحو الأعلى ويكون الرسم لها بالشكل التقريبي



الرسم التقريبي لـ sinx



مثال آخر: $f(x) = \sin x = 0$ وهي معادلة متسامية (مثلثية) جذورها
$x = \pi k$ حيث لديها عدد غير منته من الحلول حيث $k \in \mathbb{Z}$

تعريف: نقول عن $\alpha \in \mathbb{R}$ انه جذر معزول للمعادلة $f(x)=0$

إذا أمكننا إيجاد مجال $]a,b[$ بحيث $\alpha \in]a,b[$

و $]a,b[$ لا يحوي سوى α جذر للمعادلة

التمثيل الهندسي لجذور المعادلة:

نلاحظ أن جذور المعادلة $f(x)=0$ هندسياً هي فواصل

نقاط تقاطع المنحني الممثل للتابع $f(x)$ مع المحور الأفقي ox

مبرهنة من دون اثبات:

نفرض: $f(x)=0$ معادلة حدودية من الدرجة n عندئذ

يوجد لهذه المعادلة n جذر حقيقي على الأكثر

~~و~~ ونفرض x_0 جذر لهذه المعادلة عندئذ التابع $f(x)$

يقبل القسمة على $(x-x_0)$

ملاحظة: معادلة الدرجة الثانية: أكثر شيء لدينا للدرجة الثانية جذر واحد

معادلة من الدرجة الأولى: دائماً لديها جذر واحد

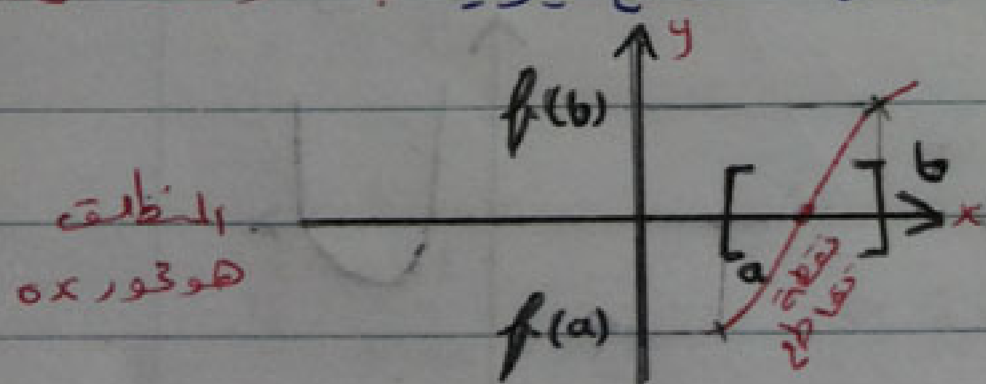
معادلة من الدرجة الثالثة: يمكن أن يكون لها 3 جذور أو جذرين أو جذر

مبرهنة هامة جداً دون اثبات:

نفرض $f(x)$ تابع معرف ومستمر على المجال $[a,b]$ حيث $f(a).f(b)<0$

إشاراتهما مختلفتين عندئذ المجال $[a,b]$ يحوي جذراً واحداً على الأقل

للمعادلة $f(x)=0$



مثال: لتكن المعادلة الحدودية التالية:
$f(x)=x^3-9x^2+23x-15=0$

نلاحظ أن بالتجريب:
$f(1)=1^3-9(1)^2+23(1)-15=0$

محققة

$$\begin{array}{r|l} & x^2-8x+15 \\ \hline x-1 & x^3-9x^2+23x-15 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & -8x^2+23x-15 \\ & -8x^2+8x \\ \hline & 15x-15 \\ & 15x-15 \\ \hline & 0 \end{array}$$

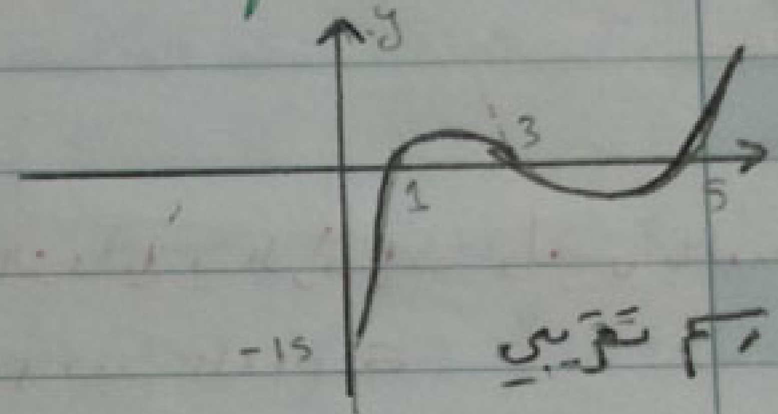
وبالتالي $f(x)$ تقبل القسمة على $(x-1)$

ومنه $f(x) = (x-1)(x^2-8x+15)=0$

$= (x-1)(x-3)(x-5)=0$

نحسب: $f(2)=3$ ، $f(0)=-15$ ، $f(4)=-3$

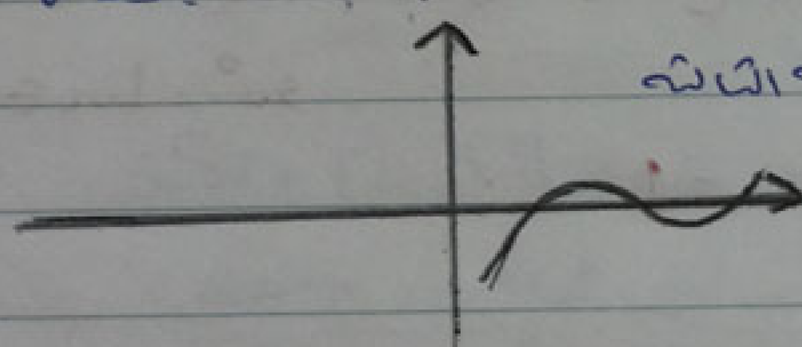
$f(6)=15$



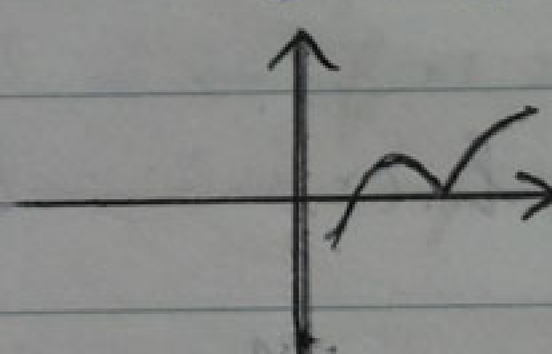
رسم تقريبي

ملاحظة: إذا كان للمعادلة ٣ جذور يكون لها الشكل:

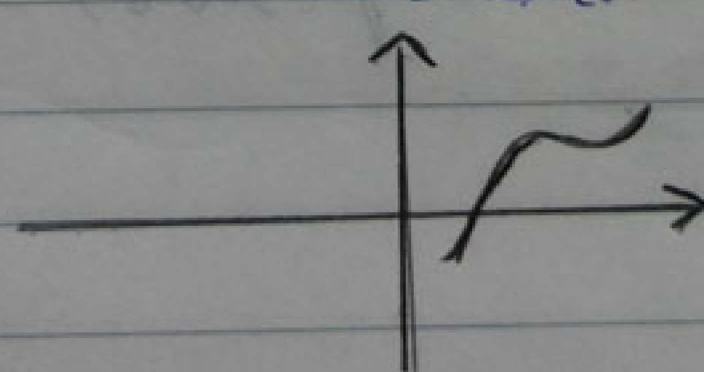
معادلة من الدرجة الثالثة لها ثلاث جذور



من الدرجة الثالثة وكان لها جذرين



إذا كان للتابع جذر واحد



: مستحيل أن تكون المعادلة من الدرجة الثالثة ولا تحوي أية جذور

تمرين: نفرض $f(x) = \cos x + e^{x} - 2x^{3}$

احسب: $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(2.25)$

الحل: $f(0) = \cos(0) + e^{0} - 2(0) = 2$

$f(1) = \cos(1) + e^{1} - 2(1) = 1.2585$

$f(2.25) = -13.9219$

ملاحظة: $1 \text{ rad} \simeq 57^\circ$

1) يجب دائماً أن نحسب الزوايا بالراديان وليس بالدرجات

2) يجب أن نستخدم أربع أرقام بعد الفاصلة

3) يجب أن نكتب الفاصلة العشرية على شكل نقطة

4) الـ Gra تستخدم بأنظمة الدفاع والملاحة

حيث $90^\circ = 100G$

5) مثال: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

هذا يتحقق فقط إذا الـ x تقاس بالراديان

وظيفة: نفرض $f(x) = x \sin x + \ln(x)$

أحسب: $f(1.5)$ ، $f(3.66)$