الأحد 12/10/2014

المحاضرة الأولى:

- المتجهات في الفضاء الثلاثي -

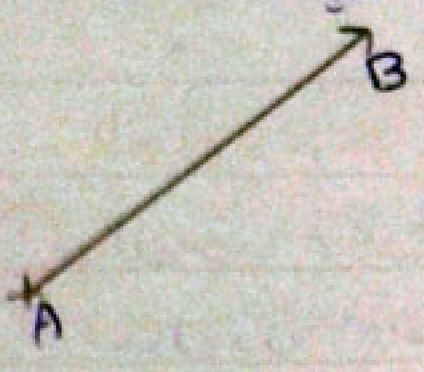
1. تمهيد:

- المتجهات الطليقة والدوال متجهية القيمة وحقول المتجهات

المتجه المقيد والمتجه الطليق:

المتجه المقيد في نقطة A من فضاء ثلاثي الأبعاد (إقليدي) هو عبارة عن ثنائية مرتبة (A,B) أو (زوج مرتب) مسقطها الأول A ومسقطها الثاني أي نقطة من الفضاء ولتكن B أو يمكن أن يعرف بالشكل:

أية قطعة مستقيمة موجهة AB مبدؤها النقطة A ونهايتها نقطة ما B نرمز له بـ $\overrightarrow{AB}$



طول المتجه:

هو طول القطعة المستقيمة AB ونرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{AB}\|$

- إذا كان A = B أي تنطبق النهاية على البداية (A,A) عندئذ نقول عن المتجه المقيد $\overrightarrow{AA}$ إنه المتجه الصفري في النقطة A

- نستطيع أن نعرف علاقة تكافؤ على مجموعة المتجهات المقيدة:

نقول عن المتجه المقيد $\overrightarrow{AB}$ إنه يكافئ المتجه $\overrightarrow{CD}$ ونكتب: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ إذا حقق:

1. لها الطول نفسه أي $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\|$
2. المتجهان متوازيان أو واقعان على المستقيم نفسه ($\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$)
3. لـ $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ الاتجاه نفسه ← هذا الشرط يكون بعد شرط التوازي

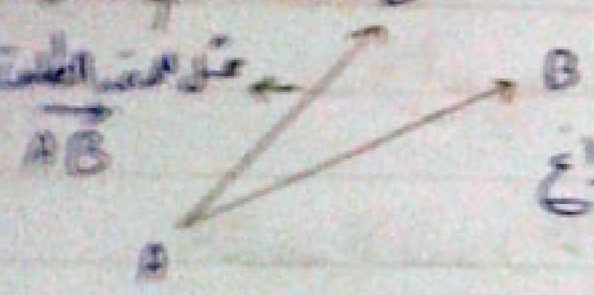
عندما أقول متجهان متوازيان مع أنهما غير متقاطعين فهما متحدا الحامل أو متوازيان في مستوٍ واحد إذاً

المتجه الطلق:

نقول عن كل صف تكافؤ من المتجهات المقيدة المتكافئة (المتسايرة) فيما بينها إنه متجه طلق أو نقول اختصاراً متجه. ويكون ممثل بالمتجه المقيد $\overrightarrow{AB}$ ونرمز للمتجه الطلق بالرمز $\overrightarrow{AB}$ (كل متجه مقيد يعين متجهاً طلقاً)

$[\overrightarrow{AB}]$ صف التكافؤ المحدد بـ $\overrightarrow{AB}$

(لا يعني أنه متجه مقيد A مبدؤه)



أي متجه طلق يوجد له ممثل وحيد في أي نقطة من الفراغ ومبدؤه تلك النقطة

من الممكن أن أرمز للمتجه الطليق بحرف وحيد:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...

إن جميع المتجهات المقيدة الصفرية في الفضاء متكافئة اصطلاحاً وتمثل متجهاً واحداً نسميه المتجه الطلق الصفري ونرمز له بالرمز $\vec{0}$

العمليات على المتجهات:

① الارتباط الخطي بين متجهين طلقين:

نقول عن متجهين أنهما مرتبطان خطياً أو متوازيان إذا أخذنا ممثل المتجه الأول وممثل المتجه الثاني وكانا هذان الممثلان متوازيان فيكون المتجهان مرتبطان خطياً:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$

ممثل $\vec{a}$ ممثل $\vec{b}$

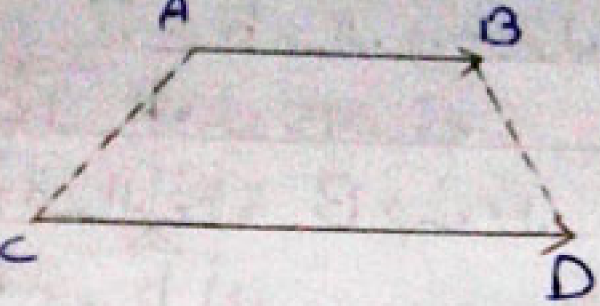
② جهة متجهين:

نقول عن متجهين طلقين مرتبطين خطياً $\vec{a}, \vec{b}$ الممثلين بالمتجهين المقيدين $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ على الترتيب إن لهما الاتجاه نفسه

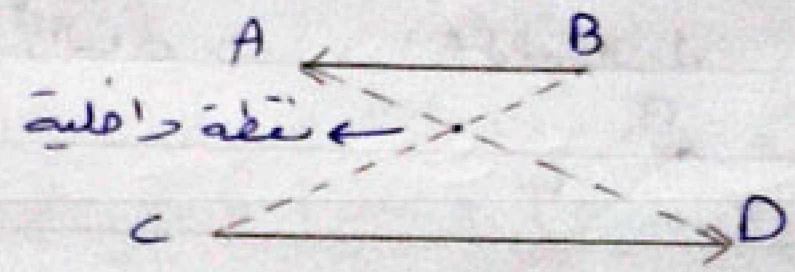
إذا لم يكن للقطعتين المستقيمتين AC و BD نقطة داخلية مشتركة

(أي إذا لم يتقاطعا بنقطة داخلية).

{ نصل بداية الأول ببداية الثاني }



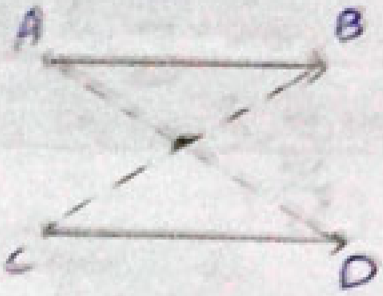
وإذا كان لهما نقطة مشتركة نقول إن المتجهين الطليقين متعاكسان بالاتجاه



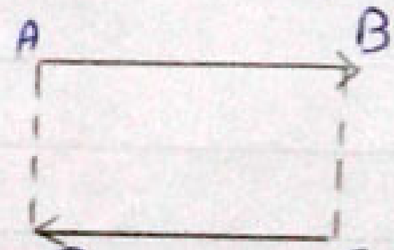
ملاحظة:

إذا وصلنا بداية المتجه الأول بنهاية الثاني يصبح لدينا:

إذا تقاطعا بنقطة داخلية يكون لهما نفس الاتجاه



وإذا لم يتقاطعا بنقطة داخلية يكون لهما اتجاهان متعاكسان.



③ طول المتجه الطليق:

هو طول أحد الممثلين (أي هو طول قطعة مستقيمة) ويرمز له بالرمز $\|\vec{a}\|$

إذا كان لدينا متجه طليق $\vec{a}$ فإن المتجه الذي يساويه بالطول ويعاكسه بالاتجاه نسميه المتجه المعاكس ويرمز له بالرمز $-\vec{a}$

وإذا كان $\vec{a}$ ممثل بالمتجه $\overrightarrow{AB}$ أي $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$

فإن $-\vec{a}$ ممثل بالمتجه $\overrightarrow{BA}$ $-\vec{a} = [\overrightarrow{BA}]$

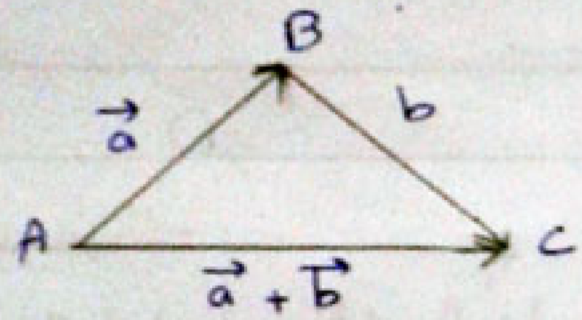
④ مجموع متجهين طليقين:

يُعرَّف مجموع متجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ والذي نرمز له بـ $\vec{a}+\vec{b}$ بأنه ذلك المتجه الممثل بالمتجه المقيد $\overrightarrow{AC}$ المعين كالآتي:

نختار نقطة A ونأخذ النقطة B حيث يمثل $\overrightarrow{AB}$ المتجه $\vec{a}$ كما نأخذ النقطة C حيث يمثل $\overrightarrow{BC}$ المتجه $\vec{b}$ أي

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} \quad , \quad b = \overrightarrow{BC}$$

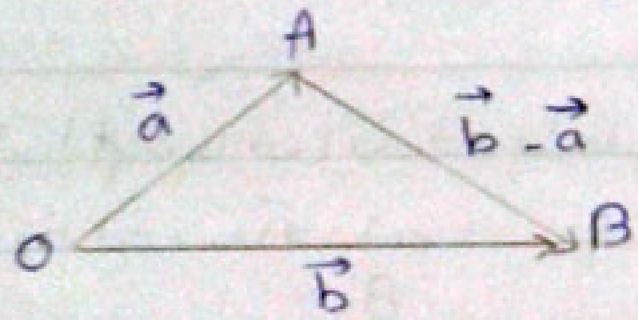
ممثل المتجه الأول   ممثل المتجه الثاني



وينتج بأن:

$$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AC}$$

⑤ طرح متجهين:



يعرف طرح متجهين بالعلاقة:

$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{OB} \qquad \vec{a} = \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

⑥ متراجحة المثلث:

طول متجهين أصغر أو يساوي طول المتجه الأول + طول المتجه الثاني

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

⑦ ضرب متجه بعدد حقيقي:

يعرف ضرب أو جداء متجه $\vec{a}$ بعدد حقيقي λ والذي نرمز له بـ $\lambda\vec{a}$ بأنه ذلك المتجه ذو الطول:

$$\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\,\|\vec{a}\|$$

والذي يتفق مع $\vec{a}$ بالاتجاه إذا كان $\lambda > 0$ ويختلف معه بالاتجاه إذا كان

$\lambda < 0$

- إنّ مجموعة المتجهات الطليقة مزودة بعمليتي الجمع والضرب بعدد السابقتين تشكل فضاء متجهات فوق حقل الأعداد الحقيقية.

② الجداء السلمي لمتجهين

إذا كان $\vec{a}, \vec{b}$ متجهين غير صفريين فنقول عن العدد الحقيقي:

$$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

حيث $\angle(\vec{a},\vec{b})$ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين اللذين لهما المبدأ نفسه ويمثلان $\vec{a}, \vec{b}$

إنه الجداء السلمي (أو الداخلي أو النقطي) للمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ وإذا كان أحد المتجهين صفراً فنضع $\vec{a}.\vec{b} = 0$

نستنتج:

1) الشرط اللازم والكافي حتى يكون $\vec{a}.\vec{b} = 0$ هو: إما أن يكون أحد المتجهين هو المتجه الصفري أو أنّ المتجهين متعامدين أي $(\vec{a} \perp \vec{b}$ والزاوية بينهما قائمة$)$

2) إذا كان المتجهان $\vec{a}, \vec{b}$ متوازيان أو مرتبطان خطياً (لهما الاتجاه نفسه) عندئذٍ:

$$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|$$

3) $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2$

4) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

5) $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c}$

6) $\vec{a}(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}.\vec{b})$

7) $(\lambda\vec{a}).\vec{b} = \lambda(\vec{a}.\vec{b})$

الجداء السلمي تبديلي.

الاستقلال الخطي:

نقول عن المتجهات $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ إنها مرتبطة خطياً إذا وجدت أعداد حقيقية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ليست جميعها أصفار (واحد منها على الأقل ليس

صفرية) بحيث يكون:

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\dots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0}$$

وإذا اقتضت هذه المساواة الأخيرة أن يكون

$$\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$$

فإننا نقول عن المتجهات $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ إنها مستقلة خطياً أو أنها مستقلة

- إذا كان لدينا مجموعة من المتجهات أحدها المتجه الصفري ستكون مرتبطة خطياً.
- يكون المتجهان $\vec{a},\vec{b}$ مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا وقع ممثلاهما المنطلقان من نقطة واحدة (من المبدأ نفسه) واقعين على المستقيم نفسه وإلا لم يكونا متوازيين (لم يكونا مرتبطين خطياً).
- تكون المتجهات الثلاثة $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا كانت المتجهات المقيدة الممثلة لها (ممثلات هذه المتجهات) والمنطلقة من نقطة واحدة تقع في مستوٍ واحد.
- يوجد في الفضاء ثلاثي الأبعاد دائماً ثلاثة متجهات مستقلة خطياً لكننا لا نستطيع إيجاد أربعة أو أكثر من المتجهات مستقلة خطياً ولكن لابد أن تكون مرتبطة خطياً.
- إذا كان لدينا ثلاثة متجهات $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ مستقلة خطياً فإن أي متجه $\vec{a}$ في هذا الفضاء يكتب كتركيب خطي بالشكل

$$\vec{a}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\lambda_3\vec{e}_3$$

وعندئذٍ نقول عن المتجهات $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ إنها قاعدة (أساس) للفضاء.