تعريف: نسمي جملة المعادلات الخطية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

جملة خطية متجانسة إذا تحقق:

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$$

مثال: أوجد مجموعة حلول جملة المعادلات الخطية التالية المعرفة على $\mathbb{R}$:

كتابة مصفوفة موسعة أو مصفوفة الامثال لنفس الشيء لان الامثال = 0 لان عمليات ما يتغير شيء)

$$x - y + z = 0$$
$$x + y + 2z = 0$$
$$x + 2y - z = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & +1 \\ 1 & 1 & +2 \\ 1 & +2 & -1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \longrightarrow R_2 - R_1$
$R_3 \longrightarrow R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & +2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$R_2 \longrightarrow 1/2\, R_2$
$R_3 \longrightarrow 1/3\, R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2/3 \end{pmatrix}$$

$R_3 \longrightarrow R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -7/6 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \longleftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \longrightarrow R_1 - R_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \longrightarrow R_2 - 5R_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 - 2R_1$$

$$R_2 \longrightarrow 1/2 R_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 - R_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x - y + 0z = -1$$
$$0x + y + z = 6$$
$$0x + 0y + 0z = 1$$

المعادلة الأخيرة مستحيلة الحل لذلك
يكون مجموعة الحلول هي :

$$S = \emptyset$$

$$2x+y+z+t=1$$
$$x+2y+z+t=1$$
$$x+y+2z+t=1$$
$$x+y+z+2t=1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x=y=z=t=1/5$$

$$S=\{1/5, 1/5, 1/5, 1/5\}$$