الموضوع: التاريخ: / /

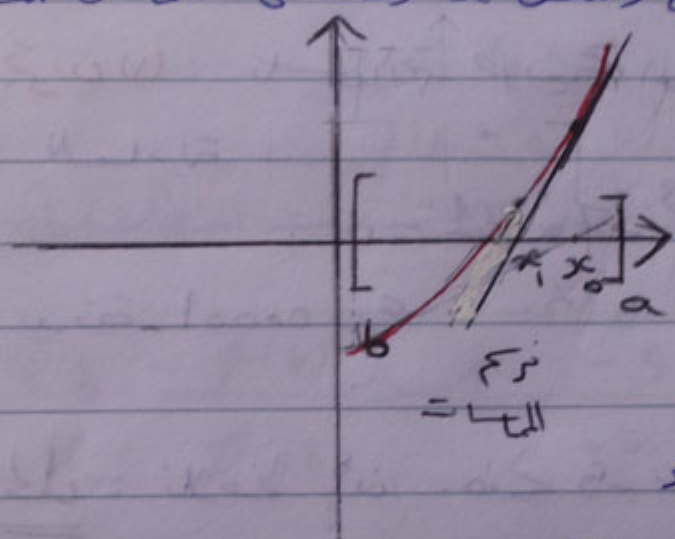
المحاضرة الخامسة

ثالثاً: طريقة المماس:

نفرض $f(x)$ تابع مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $[a,b]$

حيث $f(a) \cdot f(b) < 0$

نختار إحدى النقطتين ولتكن a ولننشئ المماس المار بالنقطة $(a, f(a))$



والذي يقطع المحور $\overrightarrow{ox}$ بالنقطة x_1 ثم نرسم المماس المار من النقطة $(x_1, f(x_1))$ فيقطع $\overrightarrow{ox}$ بالنقطة x_2

ثم نكرر هذه العملية حتى نحصل على قيمتين x_n ، x_{n-1} تحققان $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

حيث ε الدقة المطلوبة

نلاحظ أن معادلة المماس المار من النقطة $(a, f(a))$ على الشكل التالي:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

كذلك نقطة تقاطع هذا المستقيم مع $\overrightarrow{ox}$ تحدد بوضع $y=0$ ولتكن x_1 فاصلة نقطة التقاطع فيكون

$$0 - f(a) = f'(a)(x_1 - a)$$

ومنه :
$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

بعد التكرار n مرة يصبح القانون على الشكل التالي

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

تمرين (1): باستخدام طريقة المماسات أوجد جذر تقريبي للمعادلة هذه لديها ثلاث جذور، إذا افترضنا الطرف الخاص عكس أن يذهب إلى جذر آخر

$f(x) = x^3 - 7x + 1 = 0$ في المجال $[0,1]$

بدقة $\varepsilon = 0.001$

الحل: نلاحظ أن $f(b) = f(1) = -5 < 0$

$$f(a) = f(0) = 1 > 0$$

وبالتالي يوجد جذر للمعادلة $f(x)=0$ في $[0,1]$ وليكن α كذلك $f(x)$ تابع حدودي قابل للاشتقاق حيث

$$f'(x) = 3x^2 - 7$$

نطبق قانون المماسات انطلاقاً من النقطة $a=0$ حيث $f'(0) = -7$ فنجد:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 0 - \frac{1}{-7} = 0.1428$$

$f(x_1) = 0.0033$ ، $f'(x_1) = -6.9388$

$$x_2 = 0.1428 - \frac{0.0033}{-6.9388} = 0.1432$$

نلاحظ أن

$$|x_2 - x_1| = 0.0004 < \varepsilon$$

ومنه $\alpha \simeq x_2 = 0.1432$

ملاحظة: لنطبق قانون المماس انطلاقاً من $b=1$

حيث $f'(1) = -4$ فنجد

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 1 - \frac{-5}{-4} = -0.25$$

نلاحظ أن: طريقة المماس تؤدي إما إلى الاقتراب للجذر أو الابتعاد عنه

إلا أن طريقة المماسات تعتبر من أسرع الطرق لكل المعادلات

المشاكل التي توجد في هذه الطريقة:

١ - أن يكون غير قابل للاشتقاق (المعادلة غير قابلة للاشتقاق)

٢ - المشتق يساوي الصفر

٣ - الخروج خارج المجال

تمرين (٣): باستخدام طريقة المماسات أوجد جذر تقريبي للمعادلة $f(x) = 3x + \sin x - e^{x} = 0$ في $[1,2]$

بدقة $\varepsilon = 0.02$

الحل: نلاحظ أن

$$f(a) = f(1) = 1.1231 > 0$$

$$f(b) = f(2) = -0.4797 < 0$$

ومنه يوجد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ في $[1,2]$ وليكن α كذلك $f(x)$ قابل للاشتقاق حيث

$$f'(x) = 3 + \cos x - e^{x}$$

نطبق قانون المماسات إنطلاقاً من النقطة $b = 2$

حيث نجد $f'(2) = 4.8052$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 2 - \frac{-0.4797}{-4.8052} = 1.9001$$

نعوض بالمشتقات

$$f(x_1) = -0.0399 \quad , \quad f'(x_1) = -4.0099$$

$$x_2 = 1.9001 - \frac{-0.0399}{-4.0099} = 1.8901$$

$$|x_2 - x_1| = 0.01 < \varepsilon$$

ومنه

$$\alpha \simeq x_2 = 1.8901$$

وظيفة: بنفس الاسلوب أوجد جذر تقريبي للمعادلة

$$f(x) = 5x - 8\ln x - 8 = 0$$

في المجال $[3, 4]$ بدقة $\varepsilon = 0.01$

بطريقة: تنصيف المجال ثم القواطع ثم المماسات