تمرين: أوجد الحل العام

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$$

الحل:

نقسم على $1+x^2$

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2 \quad — (1)$$

معادلة خطية رتبة أولى مع طرف ثانٍ ، $y' + P(x)y = q(x)$

لإيجاد الحل العام أولاً: نأخذ المعادلة المتجانسة

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$$

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}y$$

معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتحولات

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\ln|y| = \ln|1+x^2| + \ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = \ln|1+x^2|$$

$$\frac{y}{c} = 1+x^2 \Rightarrow \boxed{y = c(1+x^2)}$$

حل عام للمعادلة المتجانسة

ثانياً: نوجد الحل الخاص:

نفرض أن c تابع لـ x : $c = c(x)$

/ /

$y_1 = C(x)(1+x^2)$

$y_1' = C'(x)(1+x^2) + 2x\,C(x)$ => نعوض في ①

$C'(x)(1+x^2) + 2x\,C(x) - \frac{2x}{1+x^2}\,C(x)(1+x^2) = 1+x^2$

$C'(x)(1+x^2) = 1+x^2$

$C'(x) = 1 \Rightarrow \boxed{C = x + C_1}$ ونتابع

ع2 $y' + 2xy = 4x$

الحل : نوجد الحل العام للمعادلة بدون طرف ثاني

$y' + 2xy = 0$

$\frac{dy}{dx} = -2xy$ معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات

$\frac{dy}{y} = -2x\,dx$

$\ln|y| = -x^2 + \ln|c|$

$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -x^2 \Rightarrow$

$\frac{y}{c} = e^{-x^2}$

$\boxed{y = c\,e^{-x^2}}$

الحل العام للمعادلة المتجانسة

نوجد حل خاص للمعادلة التفاضلية نجعل c تابع لـ x :

$y_1 = C(x)\,e^{-x^2}$

$y_1' = C'(x)\,e^{-x^2} - 2x\,e^{-x^2}\cdot C(x)$

نعوض في المعادلة مع طرف ثاني

/ /

$$c'(x)\,e^{-x^2} - 2x\,\cancel{c(x)}\,e^{-x^2} + 2x\,\cancel{c(x)}\,e^{-x^2} = 4x$$

$$c'(x)\,e^{-x^2} = 4x$$

$$c'(x) = 4x \cdot e^{x^2}$$

$$c(x) = 4\int x\,e^{x^2}\,dx$$

$$\boxed{c(x) = 2e^{x^2} + c_1}$$

نعوض في y

مثال: أوجد الحل العام الملائم للشرط الابتدائي :

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$$

حيث $y(1) = 1$

الحل:

معادلة تفاضلية خطية رتبة أولى مع طرف ثاني

لإيجاد الحل العام أولاً نأخذ المعادلة المتجانسة

$$y' + \frac{3}{x}y = 0$$

$$y' = -\frac{3}{x}y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x}y$$

معادلة تفاضلية تقبل فصل المتغيرات:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3}{x}\cdot dx$$

بالمكاملة

$$\ln|y| = -3\ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|y| - \ln|c| = -3\ln|x|$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -3\ln|x| = \ln x^{-3}$$

$\Rightarrow \frac{y}{c} = x^{-3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{c}{x^3}}$ الحل العام للمعادلة المتجانسة

نجعل c تابعة لـ x لإيجاد الحل الخاص

$$y = \frac{C(x)}{x^3}$$

$$y' = \frac{C'(x) \cdot x^3 - 3x^2 \cdot C(x)}{x^6} \Rightarrow y' = \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4}$$

نعوض في المعادلة مع مراعاة

$$\frac{C'(x)}{x^3} - \cancel{\frac{3C(x)}{x^4} + \frac{3}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^3}} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{C'(x)}{x^3} = \frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow C'(x) = 2 \Rightarrow C(x) = 2x + C_1$$

$$\boxed{y = \frac{2x}{x^3} + C_1}$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية

الشرط الابتدائي $y(1) = 1$

$$1 = \frac{2}{1} + C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = -1$$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{2x}{x^3} - 1}$ الحل الخاص الملائم للشرط الابتدائي

معادلة برنولي: نقول عن المعادلة من المرتبة الأولى الخطية التي من الشكل

$$y' + P(x)\, y = q(x)\, y^n$$

$; \; n \neq 1$

$P(x), q(x)$, دوال معرفة ومستمرة على المجال ما $[a,b]$

أنها معادلة برنولي

- لإيجاد الحل العام لمعادلة برنولي نقسم على y^n ⇐ نحصل على الشكل التالي

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)\frac{y}{y^n} = q(x)$$

$$* \quad \frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)}{y^{n-1}} = q(x)$$

لردها إلى معادلة متجانسة خطية

نفرض

$$Z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{-(n-1)}$$

$$Z = y^{1-n}$$

$$Z' = (1-n)\, y^{-n} \cdot y'$$ ونعوض في *

$$\frac{1}{1-n} Z' + P(x)\, Z = q(x)$$

معادلة خطية من جديد ثم نتابع

مثال: أوجد الحل العام

$$y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{2y}$$

نضرب الطرفين بـ $2y$ ،

$$2yy' - \frac{2y^2}{x} = 1$$

نفرض

$$y^2 = Z \Rightarrow Z' = 2yy'$$

$$\boxed{Z' - \frac{2Z}{x} = 1}$$

$$Z' - \frac{2Z}{x} = 0$$

$$Z' = \frac{2Z}{x}$$

قابلة لفصل المتغيرات

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{2Z}{x} \Rightarrow \frac{dZ}{2Z} = \frac{dx}{x} \therefore \frac{dZ}{Z} = \frac{2dx}{x}$$

بالتكامل

$$\ln|Z| = 2\ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{Z}{c}\right| = 2\ln|x| = \ln x^2$$

$$\frac{Z}{c} = x^2 \Rightarrow \boxed{Z = cx^2}$$

مثال

$$y' + 2xy = -xy^4$$

الحل:

نقسم على y^4 :

$$\text{(I)} \quad \boxed{\frac{y'}{y^4} + \frac{2x}{y^3} = -x}$$

$$Z = \frac{1}{y^3} = y^{-3}$$

$$Z' = -3y^{-4} \cdot y'$$

نعوض في (I)

$$-\frac{1}{3} Z' + 2xZ = -x$$

نضرب ب : -3 :

$$\boxed{Z' - 6xZ = 3x}$$

$$Z' - 6xZ = 0$$

ونتابع

تمرين : حل

$$y' + 2xy = xy^3$$

$$y' + (\operatorname{tg} x)y = \frac{1}{\cos x}$$

العطل

الخميس 5 _ 6 تحت

الأربعاء 2 _ 3 ليلاً