★ تعريف النواة المتردّية (المتحللة أو المتفسّخة):

لتكن لدينا معادلة فريدهولوم التكاملية الخطية من النوع الثاني التالية:

$$\Psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\, \Psi(t)\, dt$$

إذا أمكن كتابة النواة $k(x,t)$ على شكل عدد منته من الحدود وكل حد مكون من جداء مضروبين بحيث الأول تابع لـ x والثاني تابع لـ t:

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t)$$

وكانت:

- $a_1(x), a_2(x), \ldots\ldots, a_n(x)$ مستقلة خطياً
- $b_1(t), b_2(t), \ldots\ldots, b_n(t)$ مستقلة خطياً
- $k(x,t)$ كمولة تربيعياً على المربع $D = \{a \le x \le b \;;\; a \le t \le b\}$

- عندئذٍ إذا تحققت هذه الشروط تكون النواة مترديّة.

مثال: (مهمة): تحقق فيما إذا كانت النواة المعطاة في المعادلة التالية مترديّة:

$$\Psi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} (x^2 \cos t + x \sin t)\, \Psi(t)\, dt = \cos x$$

الحل:

الخطوة الأولى: $k(x,t) = x^2 \cos t + x \sin t$

$a_1(x) = x^2 \qquad b_1(t) = \cos t$

$a_2(x) = x \qquad b_2(t) = \sin t$

الخطوة الثانية: نتحقق من الاستقلال الخطّي:

نأخذ معين فرونسكي للدول، وفي حال كانت قيمته لا تساوي الصفر تكون الدوال مستقلة.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 2x^2 = -x^2 \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0$$

إذاً الدوال مستقلة خطياً.

- الخطوة الثالثة: نتحقق أن $k(x,t)$ كمولة تربيعياً:

$$* \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |k(x,t)|^2\, dx\, dt = \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (x^2 \cos t + x \sin t)^2\, dx\, dt = \frac{2\pi^6}{5} + \frac{2\pi^4}{3} < \infty$$ الجواب النهائي.

* $\int_{-\pi}^{+\pi} |k(x,t)|^2 \, dt = \pi x^4 + \pi x^2 < \infty \qquad \forall x \in [-\pi, +\pi]$

* $\int_{-\pi}^{+\pi} |k(x,t)|^2 \, dx = \frac{2\pi^5}{5} \cos^2 t + \frac{2\pi^3}{3} \sin^2 t < \infty \qquad \forall \ t \in [-\pi, +\pi]$

مثال: هل النواة المعطاة متردية: $k(x,t) = x . \ln t - t . \ln x$

الحل: الاستقلال محقق و k كمولة تربيعياً (يرجى التحقق) وذلك على أي مجال معرف عليه الـ ln

---

$\boxed{\star}$ استخدام النواة المتردية لإيجاد حل لمعادلة فريدهولم التكاملية الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني:

$$\Psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \Psi(t) \, dt \qquad \boxed{1}$$

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) . b_k(t) \qquad \boxed{2}$$

- نعوض $\boxed{2}$ في $\boxed{1}$:

$$\Psi(x) = h(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x) . b_k(t) \right] \Psi(t) \, dt$$

$$\Psi(x) = h(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t) . \Psi(t) \, dt \qquad \boxed{3}$$

- لنفرض المصطلح التالي:

$$C_k = \int_a^b b_k(t) \, \Psi(t) \, dt \quad ; \ k = \overline{1,n} \qquad \boxed{4}$$

- نعوض $\boxed{4}$ في $\boxed{3}$:

$$\Psi(x) = h(x) + \lambda C_k \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$$

- نجعل $x \to t$:

$$\Psi(t) = h(t) + \lambda C_k \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \qquad \boxed{5}$$

نجعل $k \to m$ ثم بالتعويض في $\boxed{4}$ نجد:

$$C_k = \int_a^b b_k(t) \left[h(t) + \lambda C_m \sum_{m=1}^{n} a_m(t) \right] dt \quad ; \quad k = \overline{1,n} \quad m = \overline{1,n}$$

Subject / /

ـ نفك الأقواس:

$$C_k=\int_a^b b_k(t)\,.\,h(t)\,dt+\lambda\int_a^b b_k(t)\,.\sum_{m=1}^{n}c_m\,.\,a_m(t)\,dt$$

$$C_k=\int_a^b b_k(t)\,h(t)\,dt+\lambda\sum_{m=1}^{n}c_m\int_a^b b_k(t)\,a_m(t)\,dt \qquad \boxed{6}$$

ـ ندخل المصطلحات التالية:

$$h_k=\int_a^b b_k(t)\,.\,h(t)\,dt \qquad \text{«حفظ»} \qquad \boxed{7}$$

$$a_{km}=\int_a^b b_k(t)\,.\,a_m(t)\,dt \qquad \text{«حفظ»} \qquad \boxed{8}$$ «هنا الترتيب مهم»

ـ نعوض $\boxed{7}$ و $\boxed{8}$ في $\boxed{6}$:

$$C_k=h_k+\lambda\sum_{m=1}^{n}c_m\,.\,a_{km} \qquad ; \quad k=\overline{1,n} \quad m=\overline{1,n}$$

ـ نجعل $k\to m$ و $m\to k$:

$$C_m=h_m+\lambda\sum_{k=1}^{n}c_k\,.\,a_{mk}$$

or: $$C_m-\lambda\sum_{k=1}^{n}a_{mk}\,c_k=h_m$$

وهذه العلاقة تمثل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases}(1-\lambda a_{11})c_1-\lambda a_{12}c_2-\dots\dots-\lambda a_{1n}\,c_n=h_1\\ -\lambda a_{12}\,c_1+(1-\lambda a_{22})c_2-\dots\dots-\lambda a_{2n}\,c_n=h_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -\lambda a_{n1}c_1-\lambda a_{n2}c_2-\dots\dots+(1-\lambda a_{nn})\,c_n=h_n\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\delta_{mk}-\lambda a_{mk})c_k=h_m \qquad ; \quad \delta_{mk}=\begin{cases}1 & ; \ m=k\\ 0 & ; \ m\neq k\end{cases}$$

- لنأخذ محدد الأمثال :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & -\lambda a_{13} & \cdots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & -\lambda a_{23} & \cdots & -\lambda a_{2n} \\ -\lambda a_{31} & -\lambda a_{32} & 1-\lambda a_{33} & \cdots & -\lambda a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & -\lambda a_{n3} & \cdots & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

* إذا كان $\Delta(\lambda) \neq 0$ (λ ليست قيمة مميزة للنواة) عندئذ للجملة « حل وحيد » هو :

$$c_1 , c_2 , c_3 , \ldots\ldots , c_n$$

- وهذا يعني أن المعادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني غير المتجانسة حلاً وحيداً ، وهذا الحل يحدد بالصيغ الآتية :

$$\Psi(x) = h(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k \, a_k(x)$$

« نحسب قيم c_k من القانون رقم $\boxed{4}$ »

* إذا كان $\Delta(\lambda) = 0$ (λ قيمة مميزة للنواة) عندئذٍ لا يكون لجملة المعادلات الخطية أي حل أو يكون لها عدد غير منتهٍ من الحلول .

$\boxed{*}$ استخدام النواة المتردية لإيجاد حل معادلة فريدهولم المتجانسة :

$$\Psi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\, \Psi(t)\, dt = 0 \qquad \boxed{9}$$

- بإجراء دراسة مماثلة لما سبق نحصل على نفس جملة المعادلات الخطية السابقة ولكن الطرف الأيمن سيكون أصفار :

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\delta_{km} - \lambda a_{mk} \right) c_m = 0 \qquad \boxed{10}$$

- نأخذ محدد الأمثال $\Delta(\lambda)$:

* إذا كان $\Delta(\lambda) \neq 0$ عندئذٍ يوجد للجملة حل وحيد وهو $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

وهو الحل الصفري أي $\Psi(x) = 0$.

* إذا كان $\Delta(\lambda) = 0$ عندئذ يكون للجملة عدد غير منتهٍ من الحلول .

- الآن لنقابل كل حد بشعاع $\vec{C}=(c_1,c_2,\dots,c_n)$

ندعو هذا الفضاء فضاء الحلول وهو منته البعد ونرمز له $E(\lambda)$

إن بعد هذا الفضاء هو $\dim E(\lambda)=p$

حيث p هو عدد الحلول المستقلة خطياً لمعادلة فريدهولم المتجانسة.

إذاً توجد قاعدة لهذا الفضاء مكونة من p متجهة مستقلة هي: $\vec{C}^{(1)},\vec{C}^{(2)},\dots,\vec{C}^{(p)}$

وإنّ أي حل هو تركيب خطي لمتجهات القاعدة.

مثال:

$$c_1-c_2+2c_3=0$$
$$2c_1+c_2-c_3=0$$
$$-3c_1+-3c_2+4c_3=0$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & -3 & 4\end{vmatrix}=0$$

إذاً يوجد حل غير صفري لهذه الجملة $\vec{C}(c_1,c_2,c_3)$

«نكتب c_2 و c_3 بدلالة c_1»

من المعادلة الأولى $c_2=c_1+2c_3$

= الثانية = $c_3=2c_1+c_2$

نعوض c_3 في c_2 نجد $c_2=-5c_1$

ونعوض c_2 في c_3 نجد $c_3=-3c_1$

$$c_2=-5c_1$$
$$c_3=-3c_1$$

نفرض $c_1=\rho$

$$\Rightarrow c_2=5\rho$$
$$c_3=3\rho$$
$$\Rightarrow \vec{C}(-\rho,5\rho,3\rho)$$
$$\Rightarrow \vec{C}=\rho(-1,5,3)$$

إن بعد هذا الفضاء هو 1 لأنه لدينا وسيط واحد فقط هو ρ

ومتجه القاعدة لهذا الفضاء هو $(-1,5,3)$