الثلاثاء 14/10/2014

المحاضرة الثانية :

بترتيب مهم

توجيه الفضاء الثلاثي :

لتكن $\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3$ ثلاثة متجهات مستقلة خطياً و $\vec{v}_3 , \vec{v}_2 , \vec{v}_1$ ثلاثية أخرى مرتبة من المتجهات عندئذ توجد أعداد حقيقية a_i^j (j هو دليل علوي (رقم الإحداثي) وليس قوة) حيث يكون:

أما القوة $(a_1)^2$

$$\vec{v}_1 = a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2 + a_1^3 \vec{e}_3$$

رقم المتجه

$$\vec{v}_2 = a_2^1 \vec{e}_1 + a_2^2 \vec{e}_2 + a_2^3 \vec{e}_3$$

$$\vec{v}_3 = a_3^1 \vec{e}_1 + a_3^2 \vec{e}_2 + a_3^3 \vec{e}_3$$

والمعين المحدد:

الدليل السفلي يمثل رقم السطر

الدليل العلوي " العمود

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

المحدد يساوي الصفر $\Delta = 0$ $\Leftrightarrow$ المتجهات $\vec{v}_3 , \vec{v}_2 , \vec{v}_1$ مرتبطة خطياً

وإذا كان $\Delta > 0$ فإننا نقول إن للثلاثيتين المتجهات المرتبتين:

$\vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \vec{v}_3$, $\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3$

التوجيه نفسه.

وإلا (إذا كان $\Delta < 0$) فإن الثلاثية الأولى لها توجيه معاكس للثلاثية الثانية

- التبديل بين موضعي متجهين في ثلاثية يعاكس الاتجاه. بمعنى أن الثلاثية الناتجة بعد التبديل تكون معاكسة لاتجاه الثلاثية الأصلية.

فالثلاثية $\vec{e}_2 , \vec{e}_1 , \vec{e}_3$ لها توجيه معاكس لـ $\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3$

- في حين أن التبديل الدوري لثلاثية من المتجهات لا يغير الاتجاه.

مثال: $\vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3$ ثلاثية ← نبدل $\vec{e}_2 , \vec{e}_3 , \vec{e}_1$

دوري

لهذين الثلاثيتين نفس الاتجاه (التوجيه نفسه لأنه التبديل دوري).

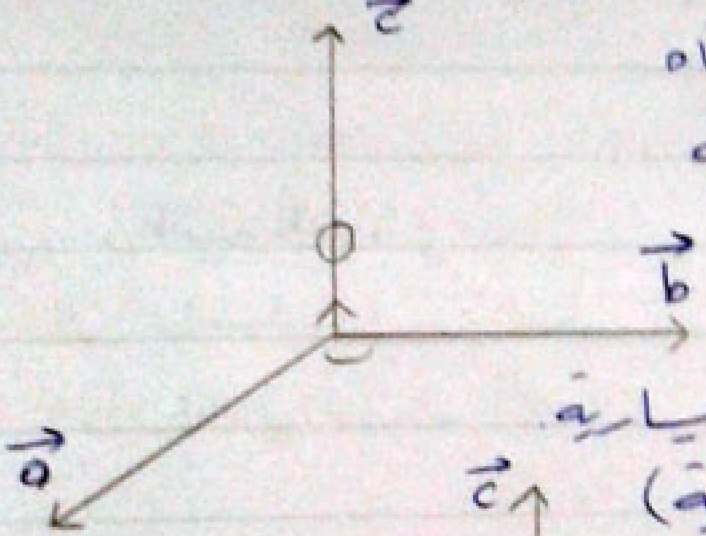
نستخدم كلمة نمط للثلاثية المطلقة وحاصل الضرب

الفضاء الثلاثي الموجه: إذا لو غيرنا الترتيب سيتغير الاتجاه

هو عبارة عن الفضاء الثلاثي مزوداً بثلاثية مرتبة من المتجهات المستقلة خطياً ونقول عن ثلاثية في الفضاء الموجه إنها ذات توجيه موجب إذا كان لها توجيه الثلاثية الأساسية نفسه وإلا قلنا عن توجيهها إنه سالب

متى نقول عن ثلاثية $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ إنها يمينية؟

نقول عن الثلاثية $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ إنها يمينية إذا كان لها التوجيه نفسه للثلاثية المؤلفة من أصابع اليد اليمنى الثلاثة: الإبهام - السبابة - الوسطى.

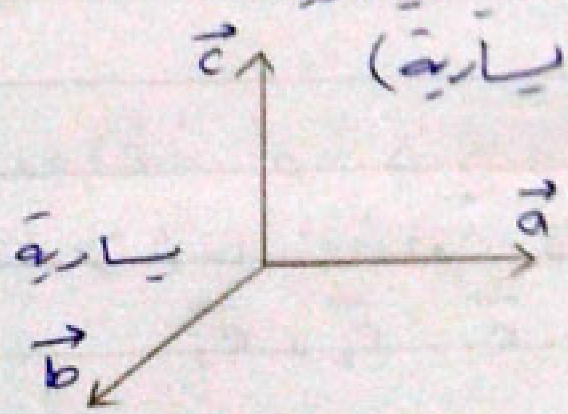


{ إذا وضعت السبابة على $\vec{a}$ ووضع $\vec{b}$ باتجاه الوسطى فيجب أن يكون الإبهام باتجاه $\vec{c}$ حتى تكون يمينية }

أما إذا كان $\vec{c}$ متجه نحو الأسفل فيصبح معاكس لاتجاه الإبهام ستكون الثلاثية يسارية.

(أو إذا بدلنا بالنسبة ترتيب $\vec{b}, \vec{a}$ تصبح يسارية)

أو تكون يسارية إذا اختلف الأمر ذاته من أجل اليد اليسرى



- طريقة ثانية:

لو أخذنا شخص يقف على المستوي $(\vec{a}, \vec{b})$ ورأسه باتجاه $\vec{c}$ وهذا الشخص ينظر إلى الزاوية بين اتجاهين $\vec{a}, \vec{b}$ التي قياسها أصغر من π عندئذٍ ستكون $\vec{a}$ على يمينه و $\vec{b}$ على يساره.

ودائماً سيكون لدينا زاويتين أحدهما أصغر من الأخرى ما لم تكون المتجهات مرتبطة ولكن المتجهات هنا مستقلة

ثانياً: الجداء الشعاعي أو الخارجي:

إذا كان $\vec{a}, \vec{b}$ متجهان في الفضاء الثلاثي المرتبط فالجداء المتجهي الذي نرمز له بـ $\vec{a} \times \vec{b}$ هو متجه يعامد كلاً من $\vec{a}, \vec{b}$ (المستوي المكون من $\vec{a}, \vec{b}$) (1)

ويعطى طوله بالمساواة:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \quad (2)$$

- نحتاج إلى ثلاثة أشياء لتعيين متجه معين وبالتالي لخلق وهي:

الطول: من العلاقة (2)

الحامل: المعرف في (1)

الاتجاه: هو:

بحيث تكون الثلاثية $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ذات توجيه موجب (أي لا تتوجيه الفضاء الثلاثي أي الثلاثية الأصلية)

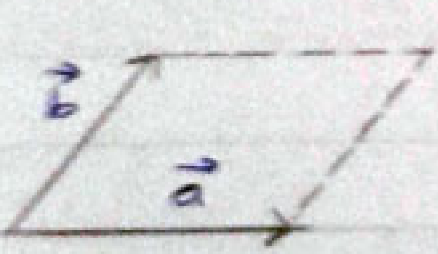
ملاحظات:

1. الجداء الخارجي ليس تبديلي وأكثر من ذلك لو غيرت ترتيب المتجهين نحصل على المتجه المعاكس للمتجه الأصلي أي:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

2. إذا كان $\vec{a}, \vec{b}$ مرتبطان خطياً $(\vec{a} \parallel \vec{b})$ فإن الزاوية بينهما تكون صفر وهذا يكافئ: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

3. إذا كان $\vec{a}, \vec{b}$ مستقلان خطياً أي $(\vec{a} \nparallel \vec{b})$ { نستطيع أن نشكل مستوي يحتويهما { هو متوازي الأضلاع الذي مساحته تعطى بـ $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$



المتجهين متلاصقين من نفس النقطة

4. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$

5. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

6. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

7. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\,\vec{a}$ ← علاقة مهمة

الجداء المختلط لثلاثة متجهات:

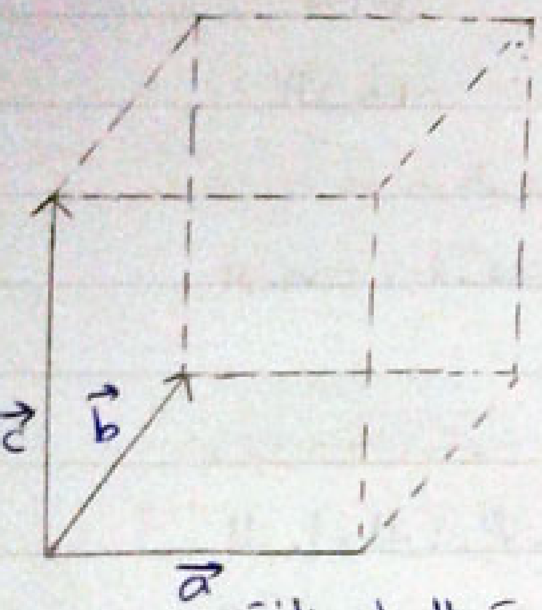
إذا كانت $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ثلاثة متجهات في فضاء ثلاثي موجه فإن الجداء المختلط
ونرمز له بالرمز $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ يعرف بأنه العدد

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

خواص الجداء المختلط:

1. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ مرتبطة خطياً $\Leftrightarrow$ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$
2. إذا كانت $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ متجهات مستقلة خطياً (غير واقعة في مستوي واحد)
فإن المستوي المنشأ من $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ هو متوازي مستطيلات
حجمه هو القيمة المطلقة للجداء المختلط
القيمة المطلقة لأن الجداء ← $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
المختلط تكون موجب أو سالب أما الحجم فهو موجب دوماً

- إشارة الجداء المختلط تكون متطابقة مع إشارة الثلاثية $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$



التبديل بين موضعي أي متجهين في جداء مختلط يغير إشارة الجداء المختلط.
أما التبديل الدوري لمتجهات الجداء المختلط لا يؤثر (لا يغير الإشارة)

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

$$= -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$$

[أي جملة تحوي متجه واحد غير معدوم ستكون مستقلة خطياً] تبديل بين موضعي متجهين

المركبات:

لنأخذ في فضاء ثلاثي الأبعاد ثلاثة محاور متلاقية في نقطة O ومتعامدة مثنى
مثنى ونسمي هذه المحاور ox, oy, oz ونسمي جملة هذه المحاور $oxyz$
ثم نأخذ متجهات واحدية موازية للمحاور:
$\vec{i}$ متجه واحدة لـ $\vec{ox}$

$\vec{j}$ متجه واحدة لـ $\vec{Oy}$ ، $\vec{k}$ متجه واحدة لـ $\vec{Oz}$

نحصل على النظام الإحداثي $Oijk$

هذه المتجهات متعامدة مثنى مثنى وهي مستقلة خطياً وتشكل قاعدة للفضاء الثلاثي

فإن أي متجه $\vec{v}$ يمثل بالشكل:

$$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$$

حيث (v_1, v_2, v_3) مركبات المتجه $\vec{v}$.

إن $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ تشكل قاعدة الفضاء ومتجهات القاعدة تحقق المتطابقات:

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1$$

$$\vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{k} = 0$$ ⟸ الجداء السلمي لكل منها معدوم ⟸ المتجهات متعامدة

- إن اختيار القاعدة تجعل الفضاء موجهاً وإذا عُدّ التوجيه موجباً مستقيماً:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad , \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad , \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

{إذا لم يكن لدينا جملة محاور إحداثية لا أستطيع أن أتعامل مع مركبات}

- جمع المتجهات هو جمع مركبات هذه المتجهات:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \;,\; \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) . \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

فنجد

$$(a_x, a_y, a_z) \mp (b_x, b_y, b_z) = (a_x \mp b_x, a_y \mp b_y, a_z \mp b_z)$$

$$\lambda (a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

الضرب داخلياً

$$(a_x, a_y, a_z).(b_x, b_y, b_z) = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$$

ضرب المتجهات خارجياً:

لتكن $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ، $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - b_2 a_3, b_1 a_3 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

الجداء المختلط: حيث $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \underbrace{\cdots}_{\text{عدد}}$$

- إذا كان لدينا فضاء ثلاثي مزود بجملة محاور فإن أي متجه طليق $\vec{p}$ سيكون له متجه ممثل منطلق من O نسميه متجه الموضع للنقطة p ونرمز له بالرمز $\overrightarrow{Op}$