مسائل البرامج المحدبة:

لتكن دالة الهدف: $f(x) \longrightarrow Min$

ولتكن الشروط:

$$\begin{cases} g_i(x) \geq 0 & ; i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0 & ; j = 1, \dots, n \end{cases}$$

يكون البرنامج السابق محدباً إذا تحقق:

1- أن يكون $f(x)$ محدباً.

2- أن تكون التوابع $g_i(x)$ مقعرة.

3- أن تكون التوابع $h_j(x)$ خطية.

مثال: هل البرنامج التالي محدب أم لا؟

$$f = x_1^2 + 9x_2^2 - 6x_1x_2 \longrightarrow Min$$
$$2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \leq 0$$
$$5x_1 - 3x_2 - 4 = 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل: 1- إن دالة الهدف f محدبة (حسب المثال السابق).

2- إن التابع $g = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \geq 0$

هو تابع مقعر لأن:

$$\nabla^2 g = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det(\nabla^2 g) = 7 \geq 0$$

وعناصر القطر الرئيسي جميعها عناصر سالبة

$\Leftarrow g$ مصفوفة سالبة $\Leftarrow g$ مقعر.

3- الشروط من شكل المساواة هي شروط خطية.

وبالتالي تحققت الشروط الثلاثة ومنه فالبرنامج محدب.

Scanned by CamScanner

البرامج الخطية

الطريقة البيانية :

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي بالطريقة البيانية :

$$2x_1 + 8x_2 \longrightarrow Max$$
$$2x_1 + 6x_2 \leq 36 \quad (1)$$
$$5x_1 + x_2 \leq 10 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

- تحديد منطقة الحلول :

الشرط الأول :

$2x_1 + 6x_2 \leq 36$

$x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 6$

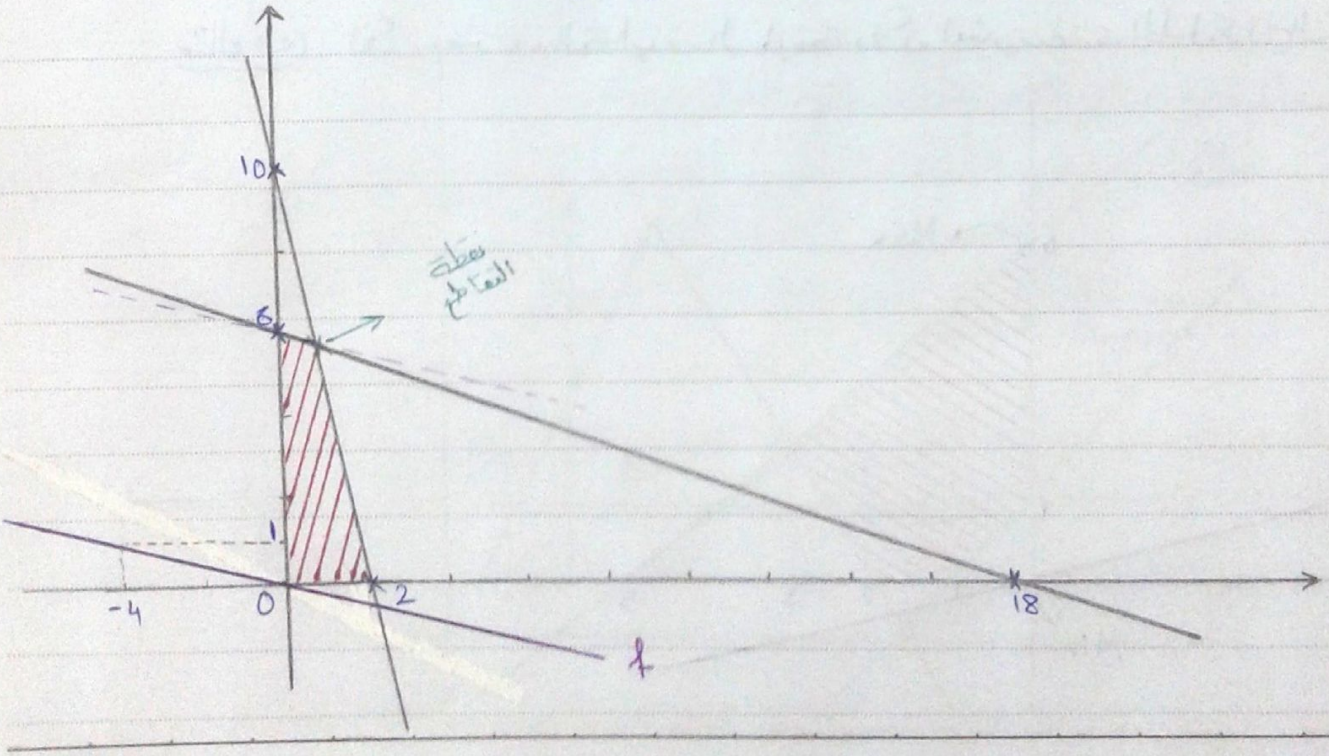
$x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 18$

الشرط الثاني :

$5x_1 + x_2 \leq 10$

$x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = 2$

$x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 10$



ALADIB.net
Scanned by CamScanner

- إيجاد نقطة التقاطع :

من ② $\quad x_2 = 10 - 5x_1$

نعوض في ① $\Leftarrow \quad 2x_1 + 60 - 30x_1 = 36$

$\Rightarrow x_1 = \frac{24}{28} = 0.85 \Rightarrow x_2 = 5.75$

إذاً نقطة التقاطع هي $(0.85 , 5.75)$

- الحل الأمثل هو إحدى النقاط :

$(0,6) , (2,0) , (0,0) , (0.85 , 5.75)$

نعوض في دالة الهدف فنجد :

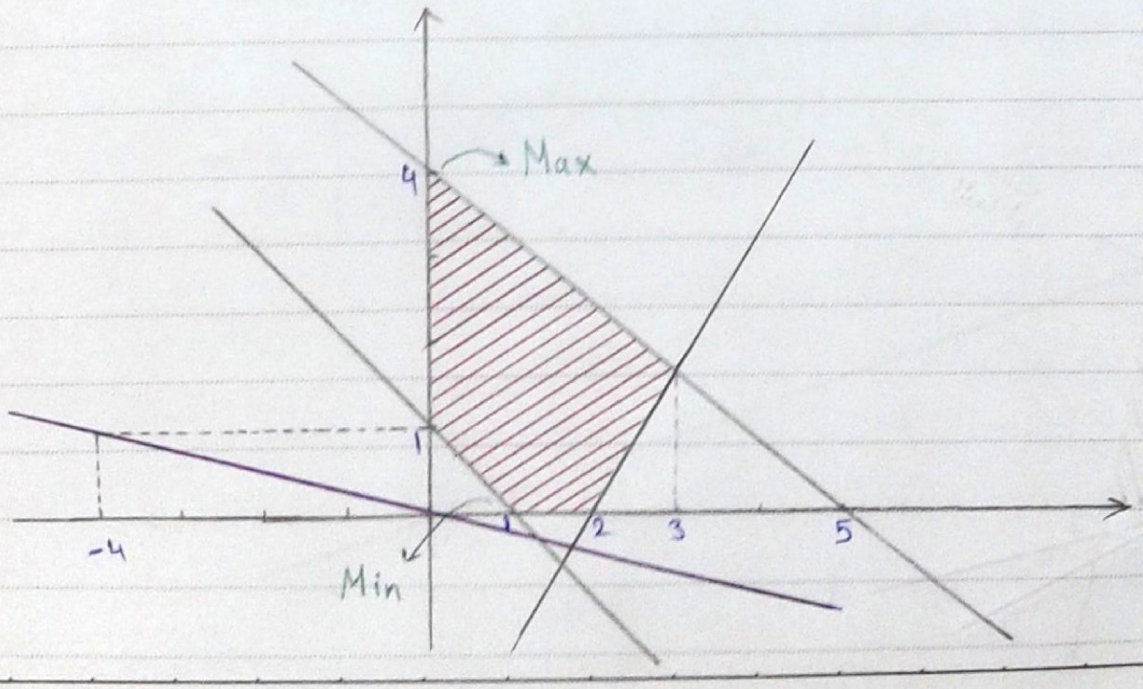
$f(0,0) = 0 \quad , \quad f(2,0) = 4$

$f(0,6) = 48 \quad , \quad f(0.85 , 5.75) = 47.7$

فالحل الأمثل هو الذي يعطي أعلى قيمة لدالة الهدف أي عندما يكون : $x_1 = 0 \ , \ x_2 = 6$

* بيانياً ، نرسم دالة الهدف وأخذ موازيات لها ، نمرّي أعلى قيمة يتقاطع فيها الموازي مع منطقة الحلول نحصل على النتيجة نفسها أي النقطة $(0,6)$. (يجب أن يكون الرسم دقيقاً)

مثال (٥) : لكن نفس دالة الهدف السابقة ولكن لنغير منطقة الحلول كما في الشكل :



ALADDIN.net

Scanned by CamScanner

/ /

أنواع البرامج الخطية حسب حلولها:

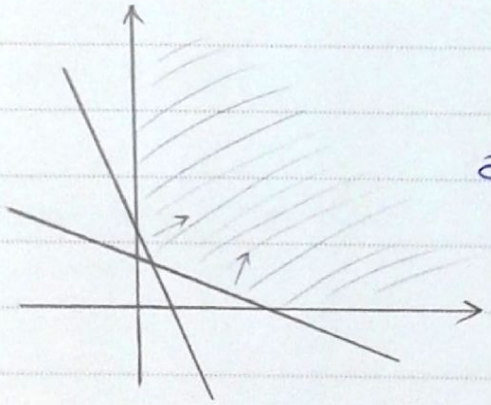
١- مسألة لها حل وحيد (كما في المثال السابق).

٢- مسألة لها عدد غير منته من الحلول.

في هذه الحالة تكون دالة الهدف توازي أحد شروط المسألة، ولكن العكس غير صحيح.
فلو كانت دالة الهدف توازي شرطا لا يمثل الحل الأمثل فلن يكون للمسألة عدد غير منته من الحلول.

٣- مسألة غير محدودة. أي الحل موجود في اللانهاية.

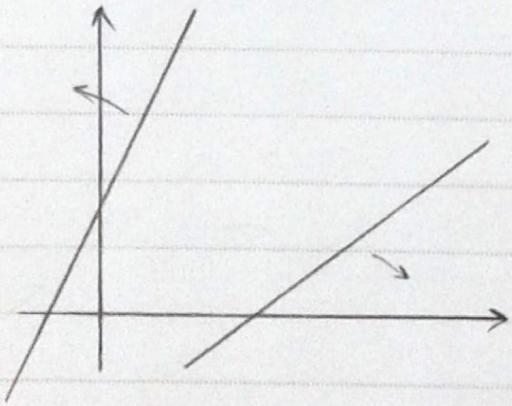
مثال:



في حال الدالة Max

٤- مسألة مستحيلة الحل: تكون منطقة الحلول فارغة.

مثال:



حيث المتحولات موجبة

Scanned by CamScanner