$$\ln|x^2+3| + \ln|\sin y| = \ln|c|$$

$$\ln(|x^2+3||\sin y|) = \ln|c|$$

$$(x^2+3)|\sin y| = c$$

$$(x^2+3)\sin y = \mp c$$

$$\sin y = 0 \Rightarrow y = \pi K$$

$$K = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

الحل الخاص يتم إيجاده بالتعويض بالشرط

$$x = 1 \quad , \quad y = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad u(1) = c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 4}$$

$$\boxed{(x^2+3)\sin y = 4}$$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (1)

مثال: أوجد المعادلة التفاضلية لأسرة (حزمة) الدوائر:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4 \quad \text{(1)}$$

دوائر تتحرك / نشتق مرة واحدة

$$2(x-c) + 2yy' = 0$$

$$(x-c) + yy' = 0$$

$$x - c = -yy'$$

$$c = x + yy' \Rightarrow$$ بالتعويض في (1)

$$(\cancel{x} - yy' - \cancel{x})^2 + y^2 = 4$$

$$y^2y'^2 + y^2 = 4$$

$$\boxed{y^2(y'^2+1) = 4}$$

وهي المعادلة التفاضلية

x متغير
y تابع

مثال: شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل التالي:

$$y = cx + c - c^2 \quad \text{—— (1)}$$

حلاً عاماً لها

الحل:

نشتق مرة واحدة لوجود متغير واحد

$$\Rightarrow \quad y' = c$$

نعوض في (1)

$$\boxed{y = xy' + y' - y'^2}$$

مثال: أوجد معادلة تفاضلية تقبل التابع التالي حلاً لها:

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad \text{—— (1)}$$

الحل:

نشتق مرتين لوجود ثابتين c_1, c_2

$$y' = c_1 \cos x - c_2 \sin x \quad \text{—— (2)}$$

$$y'' = -c_1 \sin x - c_2 \cos x \quad \text{—— (3)}$$

لإيجاد الثوابت c_1, c_2 نضرب طرفي (2) بـ $\cos x$ ،

وطرفي (3) بـ $-\sin x$

$$\Rightarrow \quad y' \cos x = c_1 \cos^2 x - c_2 \cos x . \sin x$$

$$-y'' \sin x = c_1 \sin^2 x + c_2 \cos x . \sin x$$

بالجمع ——

$$\boxed{y' \cos x - y'' \sin x = c_1} \quad \text{——} \quad *$$

بشكل مشابه نضرب طرفي (2) بـ $\sin x$ ،

وطرفي (3) بـ $\cos x$ نجد:

$$\boxed{C_2 = -(y' \sin x + y'' \cos x)} \quad — **$$

نعوض * و ** في ①

نحصل ع المعادلة التفاضلية

« يجب إكمال الحل مهم الإكمال في الامتحان

أي يجب الشرح والتفصيل »

مثال: أوجد حزمة المستقيمات المتعامدة مع المستقيم

$$y = 2x + 1$$

حزمة المستقيمات هي المعادلة التفاضلية

ميل المستقيم $\boxed{y'_1 = 2}$

نفرض y'_2 ميل حزمة المستقيمات

$$\boxed{y'_1 \cdot y'_2 = -1}$$

$$2 \cdot y'_2 = -1 \Rightarrow y'_2 = -\tfrac{1}{2}$$

$$\boxed{y = -\tfrac{1}{2} x + c}$$ تمثل حزمة المستقيمات المتعامدة مع ذلك المستقيم

حيث c ثابت كيفي (اختياري)

- المعادلات التفاضلية التي ترد إلى معادلات قابلة للفصل.

يوجد الكثير من المعادلات التفاضلية غير القابلة لفصل المتحولات ولكنها ترد إلى معادلات ذات متحولات قابلة للفصل وذلك بإجراء تبديل في التابع أو المتغير.

هذه المعادلات لها الشكل التالي:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \quad ; \quad a, b, c \text{ ثوابت}$$

لردها إلى معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات

نفرض $z = ax + by + c$ نفرض المتغير الثاني

بالمفاضلة $\Rightarrow \quad dz = a\,dx + b\,dy$

وقسمنا على dx

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

أو تكتب على الشكل التالي

$$\frac{dz}{dx} = b f(z) + a \qquad \text{حيث} \quad \frac{dy}{dx} = f(ax+by+c) = f(z)$$

هذه معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات

$$dx = \frac{dz}{b(f(z)) + a}$$

$$x = \int \frac{dz}{b f(z) + a} + c$$

مثال

$$y' = x + y + 1$$

معادلة تفاضلية غير قابلة لفصل المتغيرات

نفرض $z = (x + y + 1)$

بالمفاضلة $\Rightarrow \quad dz = dx + dy$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \qquad y' = z = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + z \Rightarrow dx = \frac{dz}{1+z}$$

$$x = \ln|1+z| + \ln|c|$$

$$x = \ln|c.(1+z)|$$

$$c.(1+z) = e^x$$

$$1 + z = \frac{e^x}{c} = c_1 . e^x \quad ; \quad \frac{1}{c} = c_1$$

$$Z = c_1 e^{x} - 1$$

$$x + y + 1 = c_1 e^{x} - 1$$

الحل العام $\boxed{y = c_1 e^{x} - x - 2}$

مثال: أوجد الحل العام

$$y' = \frac{1}{x+y-1}$$

الحل

نفرض

$$Z = x + y - 1$$

$$dZ = dx + dy$$

$$\frac{dZ}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dZ}{dx} = 1 + \frac{1}{Z}$$

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{Z+1}{Z}$$

$$dx = \frac{Z}{Z+1}\, dZ$$

بإضافة وطرح (1)

$$x = Z - \ln|Z+1| + \ln|c|$$

ونستطيع إيجاد y