المحاضرة السادسة:

الزمر:

تعريف: لتكن G مجموعة غير خالية، نسمي التطبيق (التابع):

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G$$

$$\forall a,b \in G : (a,b) \longmapsto a\cdot b$$

عملية ثنائية على G، على سبيل المثال "جمع وضرب الأعداد، جمع وضرب المصفوفات".

تعريف الزمرة: وهي مجموعة غير خالية G معرف عليها عملية ثنائية

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G$$

$$(a,b) \longmapsto a\cdot b$$

وتحققان "أي المجموعة والعملية "معاً":

1). $\forall a,b \in G : a\cdot b \in G$

2). $\forall a,b,c \in G : (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ العملية تجميعية

3). $\exists e \in G \;;\; \forall a \in G : a\cdot e = e\cdot a = a$ يدعى e بالحايد

4). $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G \;;\; a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = e$

ونسمي a^{-1} مقلوب العنصر a، ونسمي الثنائية $(G,\cdot)$ زمرة.

ونقول عن الزمرة إنها تبديلية إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall a,b \in G : a\cdot b = b\cdot a$$

أمثلة على الزمر:

1). زمرة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ بالنسبة لعملية جمع الأعداد المألوفة $(\mathbb{Z},+)$ تشكل زمرة تجميعية.

العنصر الحايد فيها هو الصفر، ولكل عنصر $a \in \mathbb{Z}$ نظير وهو:

$$-a \in \mathbb{Z}$$

2). مجموعة المصفوفات المربعة المعرفة على الأعداد الصحيحة من

المرتبة (n) بالنسبة لعملية الجمع تشكل زمرة تبديلية

$M_n(\mathbb{Z}) = \{(a_{ij}) ; i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$

والعنصر المحايد فيها هو المصفوفة الصفرية ونظير العنصر $A = (a_{ij})$

حيث $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ وذلك $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ هو العنصر $A = (-a_{ij})$

مثلاً: المصفوفة: $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ نظيرها هي المصفوفة: $-A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

3) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ تشكل زمرة ضربية (استثنينا الصفر لأنه لا يوجد له مقلوب ضربي) والعنصر المحايد فيها هو الواحد ، مقلوب كل عنصر غير صفري $x \in \mathbb{R}$ هو $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$.

4) المجموعة: $S = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det A = ad - bc \neq 0 ; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات تشكل زمرة (وضعنا شرط المحدد لا يساوي الصفر لكي نضمن وجود مقلوب مصفوفة وبذلك يكون لكل عنصر مقلوب) والعنصر المحايد فيها هو I_2 .

إن الخصائص السابقة تتعلق بالزمرة الضربية أما الزمرة الجمعية تختلف بكل ما يأتي:

	جمعية	ضربية
العملية الثنائية	$+$	$\cdot$
المحايد	0	$1, e$
تشكيل العنصر	$a + b$	$a \cdot b$.
المقلوب (النظير)	نظير a هو $-a$	مقلوب a هو a^{-1} .
العنصر مغلق	$a - b$	$a \cdot b^{-1}$
القوة (المضاعف)	مضاعف a هو: $na ; n \in \mathbb{Z}$	قوة a هي: $a^n ; n \in \mathbb{Z}$

ملاحظة: لتكن G زمرة ، $a\in G$; $n\in\mathbb{Z}$:

$$a^{n}=\begin{cases}\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{\text{(n) مرة}} & n>0\\ e & n=0\\ \underbrace{a^{-1}\cdot a^{-1}\cdot\ldots\cdot a^{-1}}_{\text{(-n) مرة}} & n<0\end{cases}$$

$$na=\begin{cases}\overbrace{a+a+\ldots+a}^{\text{(n) مرة}} & n>0\\ 0 & n=0\\ \underbrace{(-a)+(-a)+\ldots+(-a)}_{\text{(-n) مرة}} & n<0\end{cases}$$

يتساءل البعض لماذا قلنا $(-n)$ مرة... في الحالة الثالثة يكون $(n<0)$ فكيف يكون عدد مرات التكرار سالب؟ لذلك ضربنا n بناقص.

تمهيدية: لتكن G زمرة عندئذ:

1) المحايد في G وحيد.

2) قانون الاختصار محقق. $\forall a,b,c\in G: a\cdot b=a\cdot c\Rightarrow b=c$

3) مقلوب أي عنصر في G وحيد.

4) $\forall a_1,a_2,\ldots,a_n\in G: (a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n)^{-1}=a_n^{-1}\cdot a_{n-1}^{-1}\cdot\ldots\cdot a_1^{-1}$

5) $\forall a\in G: (a^{-1})^{-1}=a$

الإثبات:

1) ليكن $e_1,e_2\in G$ كل منهما محايد عندئذ:

$$e_1=e_1\cdot e_2=e_2$$

2) لنفرض أنّ $a\cdot b=a\cdot c$ بما أنّ $a^{-1}\in G$ فإنّ:

$$(a^{-1}\cdot a)\cdot b=(a^{-1}\cdot a)\cdot c\Rightarrow e\cdot b=e\cdot c\Rightarrow b=c$$

3) ليكن: $a \in G$ ، $b, d \in G$ كل منهما مقلوب العنصر a:

$$b = e \cdot b = (d \cdot a) \cdot b = d \cdot (a \cdot b) = d \cdot e = d$$

4) من أجل $n=2$: ليكن $a, b \in G$ لنفرض أن $(a \cdot b)^{-1}$ هو مقلوب العنصر $(a \cdot b)$:

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)^{-1} = e \xRightarrow{\text{نضرب بـ } a^{-1} \text{ من اليسار}} a^{-1} \cdot a \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot e$$

$$\Rightarrow b \cdot (a \cdot b)^{-1} = a^{-1}$$

$$\xRightarrow{\text{نضرب بـ } b^{-1} \text{ من اليسار}} b^{-1} \cdot b \cdot (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

$$\Rightarrow (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

نتابع الإثبات باستخدام الاستقراء.

5) ليكن $a \in G$ عندئذ: $a^{-1} \in G$ حيث يحقق:

$$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e$$

بما أن $a^{-1} \in G$ فإنه يوجد $(a^{-1})^{-1} \in G$ وهو مقلوب العنصر a^{-1} ويحقق:

$$(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = e$$

$$\Rightarrow a \cdot (a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} (a^{-1})^{-1} = a \cdot e$$

$$\Rightarrow \underline{a \cdot a^{-1}} \cdot (a^{-1})^{-1} = a \cdot e$$

$$\Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$$

تعريف: لتكن: $(G, \cdot)$ زمرة، H مجموعة جزئية من G وغير خالية. عندئذ: نقول إن H زمرة جزئية في G إذا كانت $(H, \cdot)$ بحد ذاتها زمرة.

مبرهنة: لتكن G زمرة، H مجموعة جزئية غير خالية في G، الشروط التالية متكافئة:

1) H زمرة جزئية.

2) أياً كان $a, b \in H$ فإن: $a \cdot b \in H$.

أياً كان $c \in H$ فإن: $c^{-1} \in H$

3) أياً كان $a, b \in H$ فإن: $a \cdot b^{-1} \in H$

الإثبات:

1) ⇐ 2): لنفرض أنّ H زمرة جزئية في G، حسب التعريف فإنّ H زمرة بحد ذاتها وبالتالي يكون:

$$\forall a,b,c\in H:\ a.b\in H \quad , \quad c^{-1}\in H$$

2) ⇐ 3): ليكن $a,b\in H$ لدينا $b\in H$ حسب الفرض $b^{-1}\in H$ ومنه يكون: $a.b^{-1}\in H$

3) ⇐ 1): لدينا حسب الفرض $H\neq\phi$،

ولنبرهن أنّ: $e\in H$.

بما أنّ $H\neq\phi$ فإنه يوجد في H عنصر واحد على الأقل وليكن x.

لنضع $a=x$ ، $b=x$ فنجد حسب الفرض:

$$e = x.x^{-1} = a.b^{-1}\in H$$

• إذاً المحايد موجود

• لنبرهن الآن أنه إذا كان $y\in H$ فإنّ: $y^{-1}\in H$

ليكن $y\in H$ ولنضع $a=e$ ، $b=y$ فنجد أنّ:

$$y^{-1} = e\,y^{-1} = a.b^{-1}\in H$$

• إذاً المقلوب موجود.

• لنبرهن الآن أنّ H مغلقة بالنسبة للعملية (.) أي يجب أن نبرهن أنه: أياً كان $x,y\in H$ فإنّ: $x.y\in H$

لنضع $a=x$ ، $b=y^{-1}$ فنجد حسب الفرض أنّ:

$$x.y = x.(y^{-1})^{-1} = a.b^{-1}\in H$$

• وبالتالي العملية (.) المعرفة على G هي عملية ثنائية على H.

• وأيضاً العملية (.) تجميعية على H وضوحاً.

ومما سبق يكون H زمرة جزئية.

تمرين : لتكن G زمرة تبديلية ، أثبت أن المجموعة الجزئية

$$H=\{x : x\in G \quad x^2=e\}$$

زمرة جزئية في G .

الحل:

. لنثبت أولاً أنّ H غير خالية . إنّ : $e^2=e.e=e$ ومنه $e\in H$

وبالتالي H غير خالية .

. ليكن $a,b\in H$ ، إنّ : $a^2=e$ ، $b^2=e$ ، ولنثبت أنّ :

$(a.b^{-1}\in H)$

$$(a.b^{-1})^2=(a.b^{-1}).(a.b^{-1})=a.(b^{-1}.a).b^{-1}$$
$$=a.(a.b^{-1}).b^{-1}$$
$$=a^2.(b^{-1})^2$$
$$=a^2.b^2=e$$

. الآن لنثبت أنّ : $b^{-1}=b$

بما أنّ : $b^2=e$ فإنّ :

$$b^2.b^{-1}=b^{-1}\Rightarrow b.b.b^{-1}=b^{-1}\Rightarrow \boxed{b=b^{-1}}$$

. وبما أنّ : $(a.b^{-1})^2=e$ فإنّ : $(a.b^{-1})\in H$

وبالتالي تكون H زمرة جزئية في G .

تمرين : ليكن : $n>1$ عدد صحيح أثبت أنّ المجموعة :

$$n\mathbb{Z}=\{0,\pm n,\pm 2n,\pm 3n, \_\_\}$$

تشكل زمرة جزئية في الزمرة $(\mathbb{Z},+)$

الحل:

. إنّ $n\mathbb{Z}\neq\phi$ لأنّ : $\phi\neq n\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$ لأنّ : $0\in n\mathbb{Z}$ على الأقل .

. لنبرهن أنّ $n\mathbb{Z}$ زمرة باستخدام الشرط (3) من المبرهنة السابقة

. ليكن $a,b\in n\mathbb{Z}$ ، ولنثبت أنّ : $(a.b^{-1}\in H$

عندئذٍ : يوجد $x,y\in\mathbb{Z}$ بحيث : $a=n.x , b=n.y$

$$a+(-b)=n.x+(-n.y)=n.x-n.y=n.(x-y)\in n\mathbb{Z}$$

إنّ : $(x-y)\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ $n\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $(\mathbb{Z},+)$

• مبرهنة: لتكن G زمرة، H مجموعة جزئية منتهية في G عندئذٍ:
الشرط اللازم والكافي كي تكون H زمرة جزئية في G هو أن يتحقق الشرط التالي: $\forall a,b\in H \; ; \; a.b\in H$

الإثبات:

• لزوم الشرط: ينتج مباشرة من التعريف (بما أنها زمرة فهي مغلقة بالنسبة للعملية المعرفة عليها).

• كفاية الشرط: لنفرض أن H ~~زمرة جزئية~~ تحقق الشرط:

$$\forall a,b\in H : a.b\in H$$

يكفي لكي تكون H زمرة جزئية في G هو أن يتحقق الشرط التالي:

$$\forall a\in H \; ; \; a^{-1}\in H$$

وبما أن H غير خالية يوجد عنصر $a\in H$ "عنصر واحد على الأقل" ونميز حالتين:

- إذا كان: $a=e \Rightarrow a^{-1}=e^{-1}=e$ ويتحقق الشرط.
- إذا كان: $a\neq e \Rightarrow a^1, a^2, a^3, \dots \in H$

وبما أن H منتهية يوجد $i,j\in\mathbb{N}^*$ بحيث:

$$a^i = a^j \; ; \; i\neq j$$

نفرض $i>j$ فإن: $i-j>0$

ومن جهة أخرى لدينا في G لكل عنصر مقلوب (له مقلوبه a^{-j}).

$$a^i . a^{-j} = e \Rightarrow a^{i-j} = e$$

- وبما أن $a\neq e \Rightarrow i-j\neq 1$ إذن: $i-j>1$

ومنه: $i-j-1>0$

$$a . a^{i-j-1} = e \; ; \; i-j-1 \geq 0 \Rightarrow a^{-1} = a^{i-j-1} \in H$$

ومما سبق نجد أن H زمرة جزئية في G

تمهيدية: لتكن G زمرة، $n,m\in\mathbb{Z}$ ، $a\in G$ عندئذ:

$$e^n = e$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$$

ولمن يرغب في إثباتها يستطيع ذلك بالاستقراء الرياضي على m علماً أنه غير مطلوب.. لكن يجب على الطالب أن يعرف أن يتحقق من صحة هذه الأمور في الزمرة.

انتهت المحاضرة السادسة