/ /

المحاضرة الأولى: الموديول والموديول الجزئي

- تعريف: لتكن $M \neq \emptyset$ ، R حلقة ولنزود M بقانوني تشكيل - الاول داخلي (+):

$$+: M \times M \longrightarrow M$$
$$(x, y) \longmapsto x+y$$

- والثاني خارجي (.) مجموعة مؤثراته الحلقة R :

$$\cdot : R \times M \longrightarrow M$$
$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$$

نقول عن البنية $(M, +, \cdot)$ إنه موديول يساري على R إذا تحققت الشروط:

1 - البنية $(M, +)$ زمرة تبديلية.

2 - أياً كان $\alpha, \beta \in R \wedge x, y \in M$ فإن

$1/\ 1_R \cdot x = x$

$2/\ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \qquad 3/\ (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta y$

$4/\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

وبالمثل عكيه تعريف الموديول اليميني على حلقة R " سنعتمد في دراستنا على الموديول اليساري "

وبسهولة عكيه برهان القضايا التالية: $\forall \alpha \in R \wedge x \in M$

$1/\ 0_R \cdot x = 0_M \qquad 2/\ \alpha \cdot 0_M = 0_M \qquad 3/\ (-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha \cdot x)$

والاقتضاء التالي صحيح فقط في الفضاءات الشعاعية $\alpha \cdot x = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee x = 0$

* أمثلة:

1 - لتكن R حلقة ، n عدد صحيح موجب ولنعرف على المجموعة $R^n = \{(a_1, \dots, a_n) ; a_i \in R\}$ قانوني التشكيل:

داخلي +: $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$

يساري

خارجي مجموعة مؤثراته الحلقة R . : $\alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$

بسهولة نجد أن $(R^n, +, \cdot)$ موديول على R

- وفي حالة خاصة: من أجل $n=1$ نجد أن R موديول على نفسها.

* ملاحظة: كل حلقة أو فضاء شعاعي هو موديول.

2 - كل زمرة جمعية تبديلية هي موديول على $\mathbb{Z}$ حيث أن العملية الخارجية هو المضاعف للزمرة

$$na = \begin{cases} a+a+\dots+a & ; 0<n \\ e & ; 0=n \\ (-a)+(-a)+\dots+(-a) & ; 0>n \end{cases}$$

لنتحقق من صحة شروط الموديول:

$1/\ 1 \cdot a = a \qquad 2/\ (n+m)a = na + ma$

3/ $n(a+b) = na + nb$, 4/ $(n.m)a = n(m.a)$

خواص المودولات :

$\boxed{1}$ - $0_R \cdot x = 0_M \rightarrow$ اي دي في الزمرة $(M,+)$ وكي صفر المودول

$\boxed{2}$ - $\alpha \cdot 0 = 0$

$\boxed{3}$ - $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha . x)$; $x \in M \wedge \alpha \in R$ حيث

ملاحظة: أن الاقتضاء التالي $\alpha x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ or $x = 0$

هو صحيح في الفضاءات الشعاعية

* المودول الجزئي :

* تعريف : ليكن M مودول على R ∧ $\emptyset \neq N \subseteq M$ نقول عن N مودول جزئي من M إذا تحقق الشرطان :

1/ $\forall x, y \in N$; $x - y \in N$ «N زمرة جزئية من الزمرة M»

2/ $\forall \alpha \in R$; $x \in N$: $a.x \in N$ «N معلقة بالنسبة للتشكيل الخارجي»

هذان الشرطان يقتضيان :

$\forall \alpha \in R \wedge \forall x, y \in N$: $\alpha x + y \in N$

أو

$\forall \alpha, \beta \in R \wedge \forall x, y \in N$: $\alpha x + \beta y \in N$

نلاحظ أن إذا كان $0_M \notin N \Leftarrow N$ ليست مودولاً

وكذلك إذا كان N مودولاً على R فإن كل من M , $\{0_M\} = 0$ المودول الصفري

مبرهنة : إذا كانت $(M_i)_{i \in I}$ أسرة مودولات جزئية من مودول معرف على R

فإن التقاطع $\bigcap_{i \in I} M_i$ مودول جزئي من M

الإثبات : $\emptyset \neq M_i \subseteq M \Rightarrow \emptyset \neq \bigcap_{i \in I} M_i \subseteq M$

ليكن $\alpha \in R \wedge x, y \in \bigcap_{i \in I} M_i$ فإن

$\alpha x + y \in M_i : \forall i \in I \Rightarrow \alpha x + y \in \bigcap_{i \in I} M_i$

ومنه

$\bigcap_{i \in I} M_i$ مودول جزئي من M

انتهت المحاضرة...