البرمجة الصحيحة

إن تطبيقات البرمجة الصحيحة واسعة النطاق في المسائل العملية لأن كثيراً من الوحدات الإنتاجية يجب أن تكون بأشكال كاملة، فمثلاً لا يمكن إنتاج سيارة ونصف وإنما سيارتين أو سيارة واحدة، أو لا يمكن تجنيد عشرة مجندين وثلاثة أرباع المجند بل يجب تجنيد أحد عشر مجنداً أو عشرة مجندين.
وهكذا نرى أن تطبيقات البرمجة الخطية محدودة في الحياة العملية إلى حدما.

طريقة كومري ((غومري)):

الخطوة الأولى: نوجد الحل الأمثل للبرنامج المعطى بطريقة السيمبلكس المعروفة.

الخطوة الثانية: إذا كانت جميع قيم مجاهيل المسألة عند الحل الأمثل الخطي أعداداً صحيحة يتم المطلوب، وإلا نتبع الخطوات التالية:

1) نختار في جدول السيمبلكس النهائي السطر المقابل لأكبر قيمة غير صحيحة في العمود الأخير، وليكن السطر k.

2) نضيف الشرط التالي (شرط كومري) إلى الجدول النهائي للسيمبلكس:

$$\sum_j h'_{kj} \cdot x_j \geq b'_k$$

حيث نحسب المقادير b'_k ، h'_{kj} كما يلي:

لتكن H مصفوفة الأمثال في الجدول النهائي للسيمبلكس وعناصرها h_{ij}.
و B متجهة العمود الأخير في الجدول النهائي للسيمبلكس وعناصرها b_i.
نعرّف: $[x]$ = أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي x.
ونحسب:

$$\begin{cases} h'_{kj} = h_{kj} - [h_{kj}] & ; \quad j = 1, \dots, n \\ b'_k = b_k - [b_k] & \end{cases}$$

عدد المتحولات

ونتابع حسب طريقة السيمبلكس وصولاً إلى الحل الأمثل الصحيح.

تمرين: أوجد حل البرنامج التالي بطريقة كومري :

$$x_1 - x_2 - 3x_3 \longrightarrow Min$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1$$

$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2$$

$$3x_1 + x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad , \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

الحل: *لنوجد أولاً الحل الحقيقي بطريقة السمبلكس :

الشكل القياسي :

$$x_1 - x_2 - 3x_3 \longrightarrow Min$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 + S_1 = 1$$

$$-4x_1 + 2x_2 - x_3 + S_2 = 2$$

$$3x_1 + x_3 + S_2 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
S_1	2	-1	1	1	0	0	1 ←	$R_2 \longrightarrow R_2 + R_1$
S_2	-4	2	-1	0	1	0	2	$R_3 \longrightarrow R_3 - R_1$
S_3	3	0	1	0	0	1	5	$R_4 \longrightarrow R_4 - 3R_1$
	-1	+1	+3 ↑	0	0	0		

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_3	2	-1	1	1	0	0	1	$R_1 \longrightarrow R_1 + R_2$
S_2	-2	1	0	1	1	0	3 ←	$R_3 \longrightarrow R_3 - R_2$
S_3	1	1	0	-1	0	1	4	$R_4 \longrightarrow R_4 - 4R_2$
	-7	4 ↑	0	-3	0	0	-3	

/ /

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_3	0	0	1	2	1	0	4	$R'_3 \longrightarrow \frac{1}{3} R_3$
x_2	-2	1	0	1	1	0	3	$R_2 \longrightarrow R_2 + 2R'_3$
S_3	3	0	0	-2	-1	1	1 ←	$R_4 \longrightarrow R_4 - R'_3$
	1 ↑	0	0	-7	-4	0	-15	

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	
x_3	0	0	1	2	1	0	4
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{3}$
x_1	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	0	0	0	$-\frac{19}{3}$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{46}{3}$

الحل الأمثل الحقيقي :

$x_3 = 4$, $x_2 = \frac{11}{3}$, $x_1 = \frac{1}{3}$

$S_1 = S_2 = S_3 = 0$

وقيمة دالة الهدف $= -\frac{46}{3}$

* نوجد شرط كومري : نختار السطر الثاني أي أن $k = 2$:

$h'_{21} = h_{21} - [h_{21}] = 0 - 0 = 0$

$h'_{22} = h_{22} - [h_{22}] = 1 - 1 = 0$

$h'_{23} = h_{23} - [h_{23}] = 0 - 0 = 0$

$h'_{24} = h_{24} - [h_{24}] = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

$h'_{25} = h_{25} - [h_{25}] = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

$h'_{26} = h_{26} - [h_{26}] = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$

$b'_2 = b_2 - [b_2] = \frac{11}{3} - 3 = \frac{2}{3}$

إذاً شرط كومري هو :

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \frac{2}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_2 + \frac{2}{3} S_3 \geq \frac{2}{3}$$

/ /

وهو شرط جديد يضاف للمسألة ، ولكي نستطيع إضافته إلى جدول السمبلكس النهائي يجب أن نضيف متحولاً اصطناعياً a_4 لأن الشرط من الشكل $(\geq)$.

أي يصبح الشرط بالشكل :

$$\frac{2}{3} S_1 + \frac{1}{3} S_2 + \frac{2}{3} S_3 - S_4 + a_4 = \frac{2}{3} \quad \star$$

وتصبح دالة الهدف من الشكل :

$$\frac{19}{3} S_1 + \frac{11}{3} S_2 + \frac{1}{3} S_3 + M a_4 = \frac{46}{3}$$

نضرب الشرط ★ بـ $-M$ ونجمعه إلى دالة الهدف :

$$\left(\frac{-2}{3} M + \frac{19}{3}\right) S_1 - \left(\frac{1}{3} M - \frac{11}{3}\right) S_2 - \left(\frac{2}{3} M - \frac{1}{3}\right) S_3 + M S_4 + \frac{2}{3} M - \frac{46}{3} = 0$$

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	a_4	
x_3	0	0	1	2	1	0	0	0	4
x_2	0	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{11}{3}$
x_3	1	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
a_4	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1	1	$\frac{2}{3}$
	0	0	0	$\frac{2}{3}M - \frac{19}{3}$	$\frac{1}{3}M - \frac{11}{3}$	$\frac{2}{3}M - \frac{1}{3}$	$-M$	0	$\frac{-46}{3} + \frac{2}{3}M$

نجري التحويلات السطرية المناسبة :

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	a_4	
x_3	2	0	1	0	0	0	1	-1	4
x_2	-1	1	0	0	$+\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	3
S_3	1	0	0	0	0	1	-1	1	1
S_1	-3	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	-6	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{7-2M}{2}$	-15

الحل الأمثل الصحيح : $x_3 = 4 \, , \, x_2 = 3 \, , \, S_3 = 1 \, , \, S_1 = 0 \, , \, S_4 = x_1 = 0$