المعادلة التفاضلية المتجانسة.

$$f(xt, yt) = f(x, y)$$

تمرين:

حل المعادلة التفاضلية التالية:

1) $$y' = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x}$$

$$f(xt, yt) = \frac{ty}{tx} + tg\,\frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x} = f(x,y)$$

⇐ المعادلة متجانسة نجري التحويل $z = \frac{y}{x}$

نعوض $\begin{cases} y = z \cdot x \\ y' = z' \cdot x + z \end{cases}$

$$z'x + z = z + tg\,z$$

$$z'x = tg\,z$$

$$\frac{dz}{dx}\,x = tg\,z$$

$$\frac{dz}{tg\,z} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{\cos z\,dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln \sin z = \ln x + \ln c$$

$$\sin z = x \cdot c$$

$$z = \arcsin(x \cdot c)$$

$$\frac{y}{x} = \arcsin(x \cdot c)$$

$$y = x \cdot \arcsin(x \cdot c)$$

---

(2) $$\frac{2y}{x} y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \Big/ \frac{2y}{x}$$

$$f(xt, yt) = \frac{1 + \left(\frac{ty}{tx}\right)^2}{\frac{2ty}{tx}} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{2y}{x}} = f(x, y)$$

ومنه المعادلة متجانسة نفرض التحويل الآتي :

$$z = \frac{y}{x} \Longrightarrow$$

نعوض $$\begin{cases} y = z \cdot x \\ \boxed{y' = z' \cdot x + z} \end{cases}$$

$$z' \cdot x + z = 1 + z^2 / 2z$$

$$z' x = \frac{1 + z^2}{2z} - z = \frac{1 + z^2 - 2z^2}{2z} = \frac{1 - z^2}{2z}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{1 - z^2}{2z}$$

$$\frac{2z \cdot dz}{1 - z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-2z}{1-z^2}\, dz = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|1-z^2| = -\ln|x| + \ln|c| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$1-z^2 = \frac{c}{x} \Rightarrow z^2 = -\frac{c}{x} + 1$$

$$\frac{y^2}{x^2} = 1 - \frac{c}{x}$$

$$y^2 = x^2 - cx$$

$$y = \mp\sqrt{x^2 - cx}$$

المعادلات التفاضلية التي تؤول إلى متجانسة:

١) $y' = \dfrac{3x - y + 5}{x + y - 1}$

$$3/1 \neq -1/1$$

المستقيمان متقاطعان

بالجمع $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

$$4x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1} \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$(x_0, y_0) = (-1, 2)$$

نجري التحويل

$dx = dX \qquad x = X + x_0$

$dy = dY \qquad y = Y + y_0$

نعوض في المعادلة

$$Y' = \frac{3(X-1) - (Y+2) + 5}{(X-1) + (Y+2) - 1}$$

/ /

$$Y' = \frac{3X - Y}{X + Y}$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى متجانسة

لأن الدالة $f(x,y) = \frac{3X - Y}{X + Y}$ متجانسة

حيث

$$\forall t \in \mathbb{R}^{*} : f(tX, tY) = \frac{3tX - tY}{tX + tY} = f(x,y)$$

$$Y' = \frac{3 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$$

نجري التحويل $Z = \frac{Y}{X}$ أي $Y = Z \cdot X$

ومنه $Y' = XZ' + Z$

نعوض فنجد

$$XZ' + Z = \frac{3 - Z}{1 + Z}$$

معادلة تفاضلية قابلة لفصل المتغيرات

$$XZ' = \frac{3 - Z}{1 + Z} - Z = \frac{3 - Z - Z - Z^2}{1 + Z}$$

$$= \frac{-Z^2 - 2Z + 3}{1 + Z}$$

$$\Rightarrow \cancel{X} \cdot \frac{dZ}{dX} = \frac{-Z^2 - 2Z + 3}{1 + Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{X}}{dX} = \frac{-Z^2 - 2Z + 3}{1 + Z} \cdot \frac{1}{dZ}$$

$$\Rightarrow -2\frac{dX}{X} = \frac{-2 - 2Z}{-Z^2 - 2Z + 3} \, dZ$$

بالمكاملة

/ /

$$-2\ln|X| = \ln|-Z^2-2Z+3| + \ln|c|$$

$$= \ln(c\cdot|-Z^2-2Z+3|)$$

$$= \ln\left|\frac{1}{X^2}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X^2} = c|-Z^2-2Z+3|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c_1 X^2} = -Z^2-2Z+3 \quad ; c_1 = \mp c$$

إذن

$$\frac{Y^2}{X^3} - 2\frac{Y}{X} + 3 = \frac{1}{cX^3}$$

$$-Y^2 + 2YX + 3X^2 = \frac{1}{c}$$

$x = X - 1$

$y = Y + 2$

$$-(y-2)^2 - 2(y-2)(x+1) + 3(x+1)^2 = \frac{1}{c}$$

انتهى !!!