② المعادلة التفاضلية لا تحوي المتغير المستقل x

هذه المعادلة تأخذ الشكل التالي

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{—— ①}$$

وبالتالي لإيجاد الحل العام نخفض مرتبة المعادلة التفاضلية مرتبة واحدة.

وذلك بفرض

$$y' = Z$$

وأن المجهول Z تابع لـ y

$$\frac{dy}{dx} = Z$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (\text{بفرض } Z \text{ تابع لـ } y)$$

المشتق الثاني $$\frac{d^2y}{dx^2} = Z \cdot \frac{dZ}{dy}$$

المشتق الثالث $$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(Z \cdot \frac{dZ}{dy}\right)$$

$$= \frac{dZ}{dx} \cdot \frac{dZ}{dy} + \frac{d}{dx}\left(\frac{dZ}{dy}\right) \cdot Z$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = Z\left(\frac{dZ}{dy}\right)^2 + Z^2 \frac{d^2Z}{dy^2}$$

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

الحل: هذه المعادلة التفاضلية لا تحوي المتغير المستقل x لذلك:

$$Z = y'$$

$$Z = y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Z\frac{dZ}{dy} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = Z$$

ومنه

$$yZ\frac{dZ}{dy} - Z^2 = 0$$

نقسم على Z نجد

$$y\frac{dZ}{dy} - Z = 0 \Rightarrow$$

$$y\frac{dZ}{dy} = Z$$

قابل لفصل المتحولات:

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\ln|Z| = \ln|y| + \ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{Z}{c}\right| = \ln|y|$$

$$\frac{Z}{c} = y \Rightarrow \boxed{Z = yc}$$

نعوض Z بقيمتها

$$y' = cy \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = cy \Rightarrow \frac{dy}{y} = c.dx$$

$$\ln|y| = cx + \ln|c_1|$$

$$\ln\left|\frac{y}{c_1}\right| = cx \Rightarrow \frac{y}{c_1} = e^{cx}$$

الحل العام $\boxed{y = c_1 e^{cx}}$

/ /

- المعادلات التفاضلية من الشكل التالي:

$$y'^{n} + P_1(x,y)\,y'^{(n-1)} + P_2(x,y)\,y'^{(n-2)} + \dots + P_{n-1}(x,y)\,y' + P_n(x,y) = 0$$

حيث $(n-1)$ ، $(n-2)$ قوى

يمكن تحليل هذه المعادلة إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى في y'

فنحصل على

$$[y' - f_1(x,y)][y' - f_2(x,y)][y' - f_3(x,y)] \dots [y' - f_n(x,y)] = 0$$

فنحصل على n معادلة

حيث $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$

دوال معرفة ومستمرة على مجالها

ومنه نحصل على الحل العام:

$$\varphi_1(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

$$\varphi_2(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

ومنه يكون الحل العام

$$F(x,y,c) = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \varphi_4 \dots \varphi_n = 0$$

مثال: أوجد الحل العام

$$y^2 y'^2 + x y y' - 2x^2 = 0$$ معادلة درجة ثانية

$$A = y^2 \qquad , B = xy \qquad , C = -2x^2$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$= x^2y^2 - 4y^2(-2x^2)$$

$$\Delta = x^2y^2 + 8x^2y^2$$

$$\Delta = 9x^2y^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 3xy$$

$$y'_1 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}$$

$$y'_1 = \frac{-xy + 3xy}{2y^2} = \frac{2xy}{2y^2} = \frac{x}{y}$$

$$y'_2 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}$$

$$y'_2 = \frac{-xy - 3xy}{2y^2} = \frac{-4xy}{2y^2} = \frac{-2x}{y}$$

$$\left(y' - \frac{x}{y}\right)\left(y' + \frac{2x}{y}\right) = 0$$

إما :

$$y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 - x^2 = c_1} \qquad c_1 = 2c$$

أو

$$y' = -\frac{2x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{y}$$

$$y\,dy = -2x\,dx \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{y^2}{2} = -x^2 + c_2}$$

لضرب الحلين مع بعضهم ينتج الحل العام

$$y^2 = -2x^2 + 2c_2$$

الحل العام

$$\Rightarrow (-2x^2 + 2c_2) \cdot (x^2 + c_1) = 0$$

- المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

هذه المعادلة متجانسة في y ومشتقاتها إذا حققت العلاقة التالية.

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'', \ldots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^n F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

حيث $\lambda \neq 0$ ويكون درجة تجانسها n

نأخذ (نفرض) $\lambda = \frac{1}{y}$ $\Leftarrow$

$$F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$$

لإيجاد الحل العام نفرض

$$\frac{y'}{y} = Z \Rightarrow$$

$$y' = y Z$$

$$y'' = y' Z + Z' y$$

$$\Rightarrow y'' = y Z^2 + y Z'$$

$$\frac{y''}{y} = Z^2 + Z'$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \frac{y^{(n)}}{y} = \phi(x, Z', Z, Z^2, \ldots)$$

مثال:

$$y y'' - y'^2 = 6 x y^2$$ متجانسة من الدرجة الثانية

نقسم الطرفين على y^2 :

$$\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} = 6x$$

$$\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 6x$$

لدينا

$$\frac{y''}{y} = Z^2 + Z'$$

$$\frac{y'}{y} = Z$$

دخوص في المعادلة

$$\cancel{Z^2} + Z' - \cancel{Z^2} = 6x$$

$$Z' = 6x$$

$$\frac{dZ}{dx} = 6x$$

$$dZ = 6x\,dx$$

$$\boxed{Z = 3x^2 + c}$$

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 + c$$

ناتج

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{x^3 + cx}}$$

محادلة كليرو:

وهي مه الشكل:

① $$y = xP + f(P)$$

حيث $P = y'$

لإيجاد الحل العام نشتق بالنسبة x : نشتق ①

$$\frac{dy}{dx} = P = \cancel{P} + x\frac{dP}{dx} + f'(P)\,\frac{dP}{dx}$$

P الذكير محدود

$$[f(P)]' = f'(P) \cdot \frac{dP}{dx}$$

$$\left[x + f'(P)\right] \frac{dP}{dx} = 0$$

إما $\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{P = c}$ ① c ثابت اختياري

نعوض في المعادلة ① فنحصل :

$$\boxed{y = cx + f(c)}$$ الحل العام الأول

الحل العام لمعادلة كليرو

أو ② $x + f'(P) = 0$

① و ② تكون الحل العام للمعادلة التفاضلية (معادلتان وسيطيتان)

لا نحصل على الحل الشاذ عن طريق التعويض عن الحل العام فيكون هو الحل الشاذ

من الوسيط $\boxed{P}$ الاثنان هو الحل لا ينتج من الحل العام وبالتالي يسمى بالحل الشاذ للمعادلة التفاضلية

مثال:

$$y = xP + 2P^2$$ باعتبار أن $P \equiv y'$

هذه معادلة هي من نوع كليرو ، لذلك نبدل كل $P = c$ فنحصل على

$$\boxed{y = cx + 2c^2}$$ الحل العام

$$f(P) = 2P^2$$

$$f'(P) = 4P$$

$$x + 4P = 0 \Rightarrow x = -4P \Rightarrow \boxed{P = -\frac{x}{4}}$$

$$y = x\left(-\frac{x}{4}\right) + 2\left(-\frac{x}{4}\right)^2$$

$$y = -\frac{x^2}{4} + 2\frac{x^2}{16}$$

$$y = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8}$$

$$y = \frac{-2x^2 + x^2}{8}$$

$$\boxed{8y = -x^2}$$