rank $A \le \min(n \times m)$

full rank $A = \min(n \times m)$

rows of A. A matrix in $\mathbb{C}^{n\times m}$ is of *full rank* when its rank is equal to the smallest of m and n. A fundamental result of linear algebra is stated by the following relation:

$$\mathbb{C}^n = \text{Ran}(A) \oplus \text{Ker}(A^T). \tag{1.17}$$

The same result applied to the transpose of A yields $\mathbb{C}^m = \text{Ran}(A^T) \oplus \text{Ker}(A)$.

A subspace S is said to be *invariant* under a (square) matrix A whenever $AS \subset S$. In particular, for any eigenvalue λ of A the subspace $\text{Ker}(A - \lambda I)$ is invariant under A. The subspace $\text{Ker}(A - \lambda I)$ is called the eigenspace associated with λ and consists of all the eigenvectors of A associated with λ, in addition to the zero vector.

1.7 Orthogonal Vectors and Subspaces

A set of vectors $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ is said to be *orthogonal* if

$$(a_i, a_j) = 0 \quad \text{when} \quad i \neq j.$$

It is *orthonormal* if, in addition, every vector of G has a 2-norm equal to unity. A vector that is orthogonal to all the vectors of a subspace S is said to be orthogonal to this subspace. The set of all the vectors that are orthogonal to S is a vector subspace called the *orthogonal complement* of S and denoted by $S^\perp$. The space $\mathbb{C}^n$ is the direct sum of S and its orthogonal complement. Thus, any vector x can be written in a unique fashion as the sum of a vector in S and a vector in $S^\perp$. The operator that maps x into its component in the subspace S is the *orthogonal projector* onto S.

Every subspace admits an orthonormal basis that is obtained by taking any basis and *orthonormalizing* it. The orthonormalization can be achieved by an algorithm known as the Gram–Schmidt process, which we now describe.

Given a set of linearly independent vectors $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$, first normalize the vector x_1, which means divide it by its 2-norm, to obtain the scaled vector q_1 of norm unity. Then x_2 is orthogonalized against the vector q_1 by subtracting from x_2 a multiple of q_1 to make the resulting vector orthogonal to q_1; i.e.,

$$x_2 \leftarrow x_2 - (x_2, q_1)q_1.$$

The resulting vector is again normalized to yield the second vector q_2. The ith step of the Gram–Schmidt process consists of orthogonalizing the vector x_i against all previous vectors q_j.

ALGORITHM 1.1. Gram–Schmidt

1. *Compute* $r_{11} := \|x_1\|_2$. *If* $r_{11} = 0$ *Stop, else compute* $q_1 := x_1/r_{11}$
2. *For* $j = 2, \ldots, r$, *Do*
3. *Compute* $r_{ij} := (x_j, q_i)$ *for* $i = 1, 2, \ldots, j-1$
4. $\hat{q} := x_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_i$
5. $r_{jj} := \|\hat{q}\|_2$
6. *If* $r_{jj} = 0$ *then Stop, else* $q_j := \hat{q}/r_{jj}$
7. *EndDo*

المحاضرة الخامسة:

"المصفوفة العاشرة":

تكون المصفوفة في الفضاء العشري من المرتبة $n \times m$ ذات مرتبة عليا إذا كانت

رتبتها تساوي أصغر العددين m و n.

نتيجة أساسية في الجبر الخطي موضحة في العلاقة التالية:

$$C^n = Ran(A) \oplus Ker(A^T) \qquad (1.17)$$

نفس النتيجة تنطبق على منقول المصفوفة A:

$$C^m = Ran(A^T) \oplus Ker(A).$$

يقال عن فضاء جزئي S أنه ثابت بالنسبة للمصفوفة A إذا كانت جميع

عناصر الجداء $A.S$ هي عناصر من S. $(A.S \subset S)$

في حالة خاصة من أجل أي قيمة ذاتية λ للمصفوفة A فإن الفضاء

الشعاعي الجزئي $Ker(A-\lambda I)$ هو ثابت بالنسبة للمصفوفة A

يدعى الفضاء الجزئي $Ker(A-\lambda I)$ بالفضاء الذاتي المرتبط بالقيمة λ

والمكون من جميع الأشعة الذاتية للمصفوفة A والمرتبطة بالقيمة الذاتية λ

بالإضافة إلى الشعاع الصفري.

1.7 : الأشعة المتعامدة والفضاءات الجزئية:

تكون المجموعة من الأشعة $G = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ متعامدة إذا كانت

$$(a_i, a_j) = 0 \quad \text{when} \quad i \neq j$$

تكون منظمة إذا كانت بالإضافة لكونها متعامدة لكل شعاع فيها نظيم اقليدي
عندما

مساوياً ~~للواحد~~ العنصر الواحدي.

إن الشعاع الذي يعامد جميع أشعة الفضاء الجزئي S يدعى شعاع عامد لهذا

الفضاء الجزئي.

إن مجموعة كل الأشعة التي تعامد S تشكل فضاء شعاعي جزئي يدعى بالمتمم

العمودي لـ S ويشار إليه بالرمز $S^{\perp}$.

إن الفضاء الشعاعي C^n هو الجمع المباشر للفضاء الجزئي S ومتممه العمودي

$S^{\perp}$.

وهكذا فإن أي شعاع X يمكن كتابته بشكل وحيد بشكل مجموع شعاعين

الأول من S والثاني من $S^\perp$.

إن العلاقة التي تربط بين X و مسقطه في الفضاء الجزئي S تدعى الإسقاط

العمودي على S.

كل فضاء جزئي لديه قاعدة متعامدة منظمة نحصل عليها انطلاقاً من قاعدة ما و

تحويلها إلى متعامدة منظمة.

إن عملية التحويل إلى قاعدة متعامدة منظمة يمكن إنجازه من خلال خوارزمية

تعرف بخوارزمية غرام - شميدت.

والتي سنشرحها الآن:

لتكن مجموعة من الأشعة المستقلة خطياً $\{x_1, \ldots, x_k\}$:

أولاً: نقسم الشعاع x_1 على معياره أي نقسمه على نظيمه الإقليدي وذلك

للحصول على شعاع q_1 ذو نظيم مساوٍ للعدد الواحد.

وبعدها نجعل الشعاع x_2 متعامد بالنسبة للشعاع q_1 وذلك بطرح الجداء

q_1 من الشعاع x_2 لجعل الشعاع الناتج متعامد مع q_1.

توضيح:

$$x_2 \leftarrow x_2 - (x_2, q_1)\, q_1$$

مرة أخرى، ثم نقسم الشعاع الناتج للحصول على الشعاع الثاني q_2:

الخطوة i من معالجة غرام - شميدت تتضمن تعامد الشعاع x_i

بالنسبة لجميع الأشعة السابقة q_j.

- انتهت المحاضرة الخامسة -