Subject التاريخ :

Date 2014/11/12 الموضوع :

المحاضرة الرابعة عشر

⊛ جداء المتسلسلات:

نفرض $\sum w_n$ ، $\sum z_n$ متسلسلتان عدديتان
عندئذ نعرف متسلسلة الجداء لكوشي كما يلي:

$$\sum P_n = (\sum z_n)(\sum w_n)$$

$$= (z_0+z_1+z_2+z_3+\cdots)\cdot(w_0+w_1+w_2+w_3+\cdots)$$

$$\begin{array}{ll}
P_0 \leftarrow & = \boxed{z_0 w_0} + \boxed{z_0 w_1} + \boxed{z_0 w_2} + \boxed{z_0 w_3} + \cdots \\
P_1 \leftarrow & + \boxed{z_1 w_0} + \boxed{z_1 w_1} + \boxed{z_1 w_2} + z_1 w_3 + \cdots \\
P_2 \leftarrow & + \boxed{z_2 w_0} + \boxed{z_2 w_1} + z_2 w_2 + z_2 w_3 + \cdots \\
P_3 \leftarrow & + \boxed{z_3 w_0} + z_3 w_1 + z_3 w_2 + z_3 w_3 + \cdots
\end{array}$$

وبالتالي: $P_n = z_0 w_n + z_1 w_{n-1} + z_2 w_{n-2} + \cdots + z_n w_0$

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} z_k \, w_{n-k}$$

ومنه

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k \cdot w_{n-k}$$

ملاحظة:

جداء متسلسلتين متقاربتين ليس بالضرورة متقاربة

مثال لتكن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ متقاربة حسب لايبنتز

ولنضع $\sum P_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2$

نلاحظ أن $P_n = \sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k}$

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

نلاحظ أن

$$(k+1)(n-k+1)=kn-k^2+k+n-k+1$$
$$=nk-k^2+n+1$$
$$=-k^2+nk-\left(\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n^2}{4}+n+1$$
$$=-\left(k^2-nk+\left(\frac{n}{2}\right)^2\right)+\frac{n^2}{4}+n+1$$
$$=-\left(k-\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$
$$=\left(\frac{n}{2}+1\right)^2-\left(k-\frac{n}{2}\right)^2$$
$$\leq\left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$

إذاً

$$(k+1)(n-k+1)\leq\left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$

نجذر الطرفين:

$$\sqrt{(k+1)(n-k+1)}\leq\frac{n}{2}+1=\frac{n+2}{2}$$

نأخذ المقلوب:

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\geq\frac{2}{n+2}$$

لكن $|P_n|=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$ أي نجمع من 0 حتى n إذاً نجمع $(n+1)$ حداً

نأخذ مجموع طرفي المتراجحة لـ $(n+1)$ حداً فنجد:

$$|P_n|=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\geq(n+1)\left(\frac{2}{n+2}\right)$$

$$|P_n|\geq\frac{2n+2}{n+2}\xrightarrow[n\to\infty]{}2$$

$\Leftarrow$ الحد العام لا يسعى إلى الصفر عندما $n\to\infty$ إذاً متسلسلة الجداء متباعدة

حسب معيار المقارنة $\Leftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}P_n$ متباعدة

ملاحظة: $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ، $\sum|z_n|=S$

$\sum\frac{(-1)^n}{n^2}<\frac{\pi^2}{6}$ ، $\sum z_n\leq S$

※ مبرهنة ميرتن: لنفرض $\sum w_n$ ، $\sum z_n$ متسلسلتين عقديتين
بحيث $\sum z_n$ متقاربة بالاطلاق ومجموعها S ،
و $\sum w_n$ متقاربة ومجموعها T
عندئذٍ متسلسلة الجداء لكوشي لهما متقاربة ومجموعها $(\sigma = S.T)$.

الاثبات: نضع $T_n=\sum_{k=0}^{n} w_k$ ، $S_n=\sum_{k=0}^{n} z_n$ ، $\sigma_n=\sum_{k=0}^{n} p_k$
ولنضع $\beta_n=T_n-T$ فيكون $T_n=\beta_n+T$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sigma_n &= (z_0 w_0)+(z_0 w_1+z_1 w_0)+\dots+(z_0 w_n+z_1 w_{n-1}+\dots+z_n w_0)\\
&= z_0(w_0+w_1+\dots+w_n)+z_1(w_0+\dots+w_{n-1})+\dots+z_n w_0\\
&= z_0 T_n+z_1 T_{n-1}+\dots+z_n T_0\\
&= z_0(\beta_n+T)+z_1(\beta_{n-1}+T)+\dots+z_n(\beta_0+T)\\
&= (z_0+z_1+\dots+z_n).T+(z_0\beta_n+z_1\beta_{n-1}+\dots+z_n\beta_0)\\
&= S_n.T+(z_0\beta_n+z_1\beta_{n-1}+\dots+z_n\beta_0)
\end{aligned}$$

نضع $\gamma_n=z_0\beta_n+z_1\beta_{n-1}+\dots+z_n\beta_0$

بما أن $\sum z_n$ متقاربة بالاطلاق فإن $\sum|z_n|=\alpha$

وبما أن $\sum w_n$ متقاربة فإن الحد العام يسعى للصفر $\beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ومنه $\forall\varepsilon>0 : \exists N>0 : \forall n>N : |\beta_n|<\varepsilon$

ومنه $|\gamma_n| \le |\beta_0 z_n+\dots+\beta_N z_{n-N}|+|\beta_{N+1} z_{n-N-1}+\dots+\beta_n z_n|$

$< |\beta_0 z_n+\dots+\beta_N z_{n-N}|+\alpha.\varepsilon$

نثبت N ونجعل $n\to\infty$ عندئذٍ $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ومنه $|\gamma_n|<\alpha.\varepsilon$

نجعل $\varepsilon\to 0$ عندئذٍ $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ومنه $\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S.T$

وظيفة
تمرين: أثبت أن متسلسلة الجداء لكوشي متقاربة $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}\right)$

هذا حل

Subject ____ التاريخ :

Date ____ الموضوع :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{i}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{-i}{4} + \frac{1}{5} + \frac{i}{6} + \frac{-1}{7} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) + i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

لنأخذ $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ كما أن $\forall n>0.\ a_n > a_{n+1}$

بحسب وضع $x_n = \frac{1}{2n+1} > 0$ مع التناوب

$\Leftarrow$ إن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ متقاربة حسب لايبنتز

ولنأخذ $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ كما أن $\forall n>0 :\ b_n > b_{n+1}$

$\Leftarrow$ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ متقاربة حسب لايبنتز

وإذا ضربت بعدد i تبقى متقاربة ومنه $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n+1}$ متقاربة

ولندرس المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(1+i)^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(1+i)^n|}{|n!|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|1+i|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n!}$$

$$P = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{2}^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{\sqrt{2}}{\infty} = 0 < 1$$

ومنه حسب معيار الجذر النوني فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$ متقاربة بالإطلاق

وحسب مبرهنة ميرتن فإن المتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i^n}{n+1} \cdot \frac{(1+i)^n}{n!}\right)$$

متقاربة.

متسلسلات القوى:

نفرض z_0 ثابت عقدي و z متحول عقدي و $\{a_n\}$ متتالية عقدية عندئذ ندعو المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ متسلسلة قوى مركزها z_0 وأمثالها $\{a_n\}$.

ملاحظة: متسلسلة القوى متقاربة بالاطلاق دوماً عند مركزها.

مبرهنة: (بدون إثبات)

نفرض $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ متسلسلة قوى عندئذ يوجد $r \in [0,\infty]$ بحيث تكون المتسلسلة متقاربة بالاطلاق داخل القرص $D(z_0,r)$ ومتباعدة خارجه حيث r يعطى بالقانون:

$$\boxed{r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$$

للحفظ

ندعو r نصف قطر التقارب.

ملاحظة: إذا كان $r=0$ يكون التقارب بالاطلاق فقط عند z_0
وإذا كان $r=\infty$ يكون التقارب بالاطلاق على $\mathbb{C}$
فصطلح أن $\frac{1}{0}=\infty$ ، $\frac{1}{\infty}=0$

تمرين: أوجد قرص التقارب لمتسلسلات القوى التالية ثم مثله هندسياً.

1] $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

متسلسلة قوى مركزها $z_0=0$ أمثالها $\{a_n\}=\{1\}$

$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = 1$

$D(0,1)$ ومنه قرص التقارب

2] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$

متسلسلة قوى مركزها $z_0=i$ ، أمثالها $\{a_n\}=\frac{1}{n!}$

$r = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{|\frac{1}{n!}|}} =$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

ومنه المتسلسلة متقاربة على $\mathbb{C}$

3] $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z+1)^n$

متسلسلة قوى مركزها $z_0=-1$ وأمثالها $\{a_n\}=\{n^n\}$

$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Leftarrow$ متقاربة فقط عند $z_0=-1$

تذكرة: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)} = 1$ ، كثير حدود $f(n)$

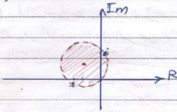
4] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n}{n^2+1}$

متسلسلة قوى مركزها $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

أمثالها $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2+1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$$

⇐ قرص التقارب هو $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i, 1\right)$



واجب: ① أثبت أن متسلسلة الجداء $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{(i-1)^n}\right)$ متقاربة وأوجد مجموعها

② أوجد قرص التقارب لمتسلسلات القوى التالية ثم مثلها هندسياً.

1] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n (z+1+i)^n}{n+1}$

2] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z+\sqrt{3}i)^n}{n!}$

3] $\sum_{n=0}^{\infty} (3z+i)^n$

انتهت المحاضرة الرابعة

Subject ____________ التاريخ :

Date ____________ الموضوع :

الحل / خاص

(1) لنأخذ المتسلسلة الأولى $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ وندرسها

نعلم أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ وهو منشور التابع الأسي

وبأخذ $x = 10$ ينتج المتسلسلة المدروسة

$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} = e^{10} \Longrightarrow$ المتسلسلة متقاربة

ونلاحظ أن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} = \sum_{n=} \left|\frac{10^n}{n!}\right|$

ومنه $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$ متقاربة بالاطلاق ومجموعها e^{10}

ولندرس المتسلسلة الثانية $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(i-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{i-1}\right)^n$

متسلسلة هندسية حدها الأول $b = 1$

وأساسها $a = \frac{-1}{i-1}$

$|a| = \left|\frac{-1}{i-1}\right| = \frac{|-1|}{|i-1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Longrightarrow$ المتسلسلة متقاربة

ولنحسب مجموعها

$$S_2 = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = 2+\sqrt{2}$$

وحسب مبرهنة ميرتن تكون متسلسلة الجداء متقاربة ومجموعها هو جداء مجموعي المتسلسلتين

$$S = S_1 \cdot S_2 = e^{10}(2+\sqrt{2})$$

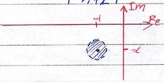
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n (z+1+i)^n}{n+2}$

مركزها $z_0 = -1-i$ ، وأساسها $\{a_n\} = \left\{\frac{e^n}{n+2}\right\}$ ونصف قطر التقارب هو

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{e^n}{n+2}\right|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+2}}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{1}{e}$$

$\Leftarrow$ قرص التقارب $D\left(-1-i, \frac{1}{e}\right)$

التمثيل الهندسي



Subject ______ التاريخ :
Date ______ الموضوع :

2] $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z+\sqrt{3}i)^n}{n!}$

$\{a_n\} = \{\frac{2^n}{n!}\}$ وأنها $z_0 = -\sqrt{3}i$ مركزها

$\Rightarrow r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\infty}{2} = \infty$

⇐ المتسلسلة متقاربة على $\mathbb{C}$

3] $\sum_{n=0}^{\infty} (3z+i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3)^n (z+\frac{i}{3})^n$

$z_0 = -\frac{i}{3}$ مركزها

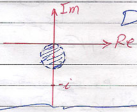
$\{a_n\} = \{3^n\}$ وأساسها

ونصف قطر التقارب

$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{1}{3}$

⇐ قرص التقارب هو $D(-\frac{i}{3}, \frac{1}{3})$

التمثيل الهندسي



انتهاء حل الوظيفة