التعريف التقليدي للاحتمال:

إذا كان فضاء تجربة مجموعة نتائجها $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ منتهية وكانت الحوادث الابتدائية $\{w_1\}, \dots, \{w_n\}$ متساوية الفرص في الوقوع بمعنى حدثاً متعلقاً بهذه التجربة

نعرّف احتمال وقوع الحدث A بالشكل:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

حيث: $|A|$ عدد إمكانات وقوع الحدث A

$|\Omega|$ " " الكلية

أي إن

$$P(A) = \frac{\text{عدد الإمكانات الملائمة لوقوع } A}{\text{" الكلية}}$$

فإذا كانت $|\Omega| = n > 0$ و $|A| = m$

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{m}{n}$$

خصائص: أي احتمال هو ...

1) $\forall A \in \mathcal{A},\ P(A) \geq 0$ أولاً

لأن: $|\Omega| = n > 0$

$|A| = m \geq 0 \Longrightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n} \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$

لأن: $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{n}{n} = 1$

و $n \neq 0$

3) إذا كان A و B حدثين منفصلين أي $A \cap B = \emptyset$ عندئذٍ،

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

لأن: $|A \cup B| = |A| + |B|$

كون $A \cap B = \emptyset$

وبالتالي:

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{|A| + |B|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|}$$

$$= P(A) + P(B)$$

4) $\forall A \in \mathcal{A} \Longrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

لأن $A \cup \bar{A} = \Omega$ و $A \cap \bar{A} = \emptyset$ فحسب 3) و2) يكون:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$\Longrightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$\Longrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

5) احتمال الحدث المستحيل $= 0$

لأن: $\boxed{\bar{\Omega} = \emptyset}$ وبالتالي:

$$P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega)$$

$$= 1 - 1 = 0$$

الحدث محتوى في حدث أكبر فإن احتمال الحدث الأصغر (المحتوى في الأكبر) أصغر من احتمال الحدث الأكبر (الحاوي للحدث الأصغر)

6) إذا كان $A \overset{\text{محتوى}}{\subseteq} B$ فإن: $P(A) \leqslant P(B)$

البرهان: الحدثان A و $B-A$ متنافيان و $A \cap (B-A)$

لا يوجد عنصر ينتمي لـ A و $B-A$ في آن واحد

و $\boxed{A \cup (B-A) = B}$ $\boxed{??}$

فحسب 3):

$$P(B) = P(A \cup (B-A))$$

$$= P(A) + P(B-A)$$

(حسب 1)

؟؟ ومنه نجد $P(B) - P(A) = P(B - A) \geq 0$

وبالتالي $P(B) - P(A) \geq 0$

$\Leftarrow P(B) \geq P(A)$

7) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$

لأن $\emptyset \subseteq \overset{\text{أي حدث}}{A} \subseteq \Omega$

بتطبيق الخاصة 6) نجد:

$0 = P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$

وبالتالي: $0 \leq P(A) \leq 1$

مثال:

سحبت ورقة واحدة بطريقة عشوائية من ورق اللعب،

أ) ما احتمال أن تكون الورقة المسحوبة حمراء

ب) " " صورة

ج) " " ورق السبوتي

الحل:

ليكن A الحدث الدال على الورقة حمراء

B " صورة

C " ملك السبوتي

لدينا $|\Omega| = 52$

أ) لدينا $|A| = 26 \Rightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

ب) لدينا $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \Leftarrow |B| = 12$

ج) لدينا $|C| = 1$ فالاحتمال المطلوب،

$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{52}$

قصور التعريف التقليدي للاحتمال:

وجدنا في ... انه يلزم شرطين:

أ) أن يكون فضاء الإمكانات له منتهية

ب) أن تكون الأحداث الابتدائية متساوية الفرص في الوقوع

لذلك فإن التعريف التقليدي يقصر عن دراسة التجارب لفضاء الإمكانات غير منتهي، فعلى سبيل المثال لا يمكن وفق التعريف التقليدي حساب احتمال الحصول على ~~الح~~ عدد أكبر من 2000 عند سحبها من الأعداد الطبيعية

ويعجز التعريف التقليدي للاحتمال عن حساب الاحتمالات عندما تكون الأحداث الابتدائية غير متساوية فرص الوقوع

فعلى سبيل المثال في تجربة رمي قطعة نقود غير متوازنة تعطي لأحد الأوجه فرصة أكبر في الظهور من الوجه الآخر فهنا لا يمكن حساب الاحتمال بالتعريف التقليدي

التعريف الإحصائي للاحتمال:

إن المراقبة الطويلة لظهور أو عدم ظهور حدث A مرتبط بتجربة معينة عند تكرارها في ظروف ثابتة تبين أن التكرار النسبي ~~لظهور~~ لظهور الحدث A تخضع لانتظام معين فإذا رمزنا بـ $n(A)$ لعدد مرات ظهور الحدث A عند تكرار التجربة n مرة فإننا نلاحظ أن التكرار النسبي لظهور الحدث A $\left(\frac{n(A)}{n}\right)$ يميل للاستقرار بالقرب من عدد معين يمثل الاحتمال بالتعريف التقليدي حيث أن الانحراف عن ذلك الاحتمال يتناقص كلما ازداد عدد مرات تكرار التجربة.

تعريف: [illegible]

(نفرض أن A حدث متعلق بتجربة ما ولنفرض أننا نكرر التجربة n مرة ونرمز بـ $n(A)$ لعدد مرات وقوع A ولنعطي احتمال A بالتعريف الإحصائي كما يلي

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(A)}{n}$$

خصائص:

1) $P(A)\geq 0$ ~~الحد~~: لأن:

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(A)}{n}$$