المحاضرة الثانية:

تذكرة حول الزمرة الدوارة:

لتكن $(G, \cdot)$ زمرة و $S = \{a_1, \dots, a_r\} \subseteq G$ ونأخذ المجموعة التالية:

$$H = \{x = a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \dots \cdot a_r^{n_r} \; ; \; n_i \in \mathbb{Z}\}$$

فنجد أن H زمرة جزئية من G وتسمى زمرة مولدة بالمجموعة S. ونرمز لها ب $H = \langle S \rangle$

وفي الكتابة الجمعية يكون: $(G, +)$

$$H = \langle S \rangle = \{x = n_1 a_1 + n_2 a_2 + \dots + n_r a_r \; ; \; n_i \in \mathbb{Z}\}$$

وفي حالة خاصة إذا كان $S = \{a\}$ وحيدة العنصر فيكون:

في الكتابة الضربية: $H = \langle S \rangle = \langle a \rangle = \{a^z \; ; \; z \in \mathbb{Z}\}$

في الكتابة الجمعية $H = \langle S \rangle = \langle a \rangle = \{za \; ; \; z \in \mathbb{Z}\}$

وفي هذه الحالة تسمى $\langle a \rangle$ زمرة دوارة مولدة بالعنصر a.

- أي كل عنصر من G « $a \in G$ » يولد زمرة دوارة

$\langle a \rangle = \{a^z \; ; \; z \in \mathbb{Z}\}$ // $(G, \cdot)$ //

$\langle a \rangle = \{z a \; ; \; z \in \mathbb{Z}\}$ // $(G, +)$ //

- ملاحظة: إذا كانت رتبة a منتهية " $o(a) = n$ " فإن الزمرة الدوارة $\langle a \rangle$ منتهية ورتبتها n حيث $\langle a \rangle = \langle a \rangle_n$

$$\langle a \rangle = \{a^1, a^2, a^3, \dots, a^{n-1}, a^n = e\}$$

وفي الكتابة الجمعية: $\langle a \rangle = \{1 \cdot a, 2 \cdot a, 3 \cdot a, \dots, n a = e\}$

وإذا كانت a ذو رتبة غير منتهية فإن

$$\langle a \rangle = \langle a \rangle_\infty = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \dots\}$$

وفي الكتابة الجمعية: $\langle a \rangle = \langle a \rangle_\infty = \{\dots, -2a, -1a, e, 1.a, 2.a, \dots\}$

- تعريف: مجموع مودولات:

لتكن $(M_i)_{i=1,\dots,n}$ أسرة منتهية من المودولات الجزئية على حلقة R

نعرف مجموع الأسرة $(M_i)_{i=1,\dots,n}$ بأنه المجموعة

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = \{x \in M \; ; \; x = m_1 + m_2 + \dots + m_n \; ; \; m_i \in M_i\}$$

مبرهنة: إذا كانت $(M_i)_{i=1,...,n}$ أسرة مودولات جزئية من مودول M على حلقة فإن:

$\sum_{i=1}^{n} M_i$ مودول جزئي من M.

البرهان: $0_M = 0_{M_1} + 0_{M_2} + --- + 0_{M_n} \in \sum_{i=1}^{n} M_i$

ولدينا $\sum_{i=1}^{n} M_i \subseteq M$ تعريفاً ومنه $\phi \neq \sum_{i=1}^{n} M_i \subseteq M$

ومن جهة أخرى: إذا كانت $\alpha \in R \wedge x,y \in \sum_{i=1}^{n} M_i$
فإن:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; x_i \in M_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad ; y_i \in M_i$$

وعندئذ:

$$\alpha x + y = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i + y_i \in \sum_{i=1}^{n} M_i$$

ملاحظة:
من أجل تعميم المبرهنة السابقة أي من أجل $(M_i)_{i \in I}$ يكون

$$\sum_{i \in I} M_i = \{x \in M ; \quad x = m_1 + --- + m_i + ---\}$$

بحيث جميع m_k أصفار، ما عدا عدد منتهٍ منها
وبالتالي يكون المجموع الغير منتهي موجود.

مبرهنة: إذا كانت A, B, C ثلاث مودولات جزئية من مودول M وكان $C \subseteq A$ فإن $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$

الإثبات: من جهة أولى:

$\forall \; x \in A \cap (B + C)$

$$\Rightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \in B + C$$

$$x = b + c \quad ; \quad b \in B \quad \wedge \quad c \in C$$

$$\Rightarrow b = \underbrace{x}_{\in A} - \underbrace{c}_{\in A,\; C \subseteq A} \Rightarrow b = x - c \in A$$

$\Rightarrow \quad x = b + c \; ; \; b \in A \cap B \;\wedge\; c \in C$

$\Rightarrow \quad x \in (A \cap B) + C$

ومنه $A \cap (B + C) \subseteq (A \cap B) + C$ $\quad \mathrm{I}$

من جهة أخرى:

$$\left.\begin{array}{l}(A \cap B) + C \subseteq A + C \\ (A \cap B) + C \subseteq B + C\end{array}\right\} \Rightarrow (A \cap B) + C \subseteq (A + C) \cap (B + C)$$

وبما أن $C \subseteq A$ $\Leftarrow$

$(A \cap B) + C \subseteq A \cap (B + C)$ $\quad \mathrm{II}$

من I و II نجد أنه تم المطلوب.

- التشاكلات المودولية:

تعاريف: ليكن M, N مودولين على حلقة R نعرف التشاكل المودولي بأنه تطبيق $f : M \to N$ يحقق الخاصتين:

1/ $f(x + y) = f(x, y)$

2/ $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

حيث $x, y \in M \;\wedge\; \alpha \in R$.

ملاحظة: واضح أن كل تشاكل مودولي هو تشاكل زمري بالكتابة الجمعية وإذا كان f متباين وغامر فنسميه تماثل مودولي وعندئذ فإن

$M \cong N \Leftrightarrow$ يوجد تماثل مودولي.

وبالتالي فإن:

1/ $f(e) = f(0_M) = 0_N$

2/ $f(-a) = -f(a)$

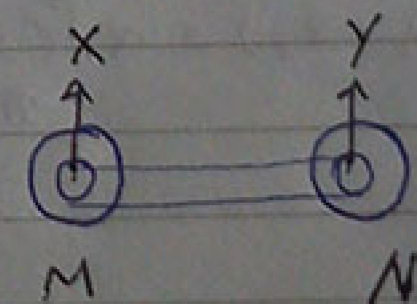
3/ $\ker f = 0 \Leftrightarrow$ f متباين

حيث $\ker(f) = \{ m \in M \; ; \; f(m) = 0_N \} = \overleftarrow{f}(0_N)$

تذكرة: إذا كان $X \subseteq M \;\wedge\; Y \subseteq N$ فإن

$\overrightarrow{f}(X) = \{ f(x) \; ; \; x \in X \} \subseteq N$

$\overleftarrow{f}(Y) = \{ m \in M \; ; \; f(m) \in Y \}$



انتهت المحاضرة...