Proposition 1.4. *Unitary matrices preserve the Euclidean inner product; i.e.,*

$$(Qx, Qy) = (x, y)$$

for any unitary matrix Q and any vectors x and y.

Proof. Indeed, $(Qx, Qy) = (x, Q^H Qy) = (x, y)$. $\square$

A vector norm on a vector space $\mathbf{X}$ is a real-valued function $x \to \|x\|$ on $\mathbf{X}$ that satisfies the following three conditions:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}$ and $\|x\| = 0$ iff $x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in \mathbf{X} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbf{X}$.

For the particular case when $\mathbf{X} = \mathbb{C}^n$, we can associate with the inner product (1.3) the *Euclidean norm* of a complex vector defined by

$$\|x\|_2 = (x, x)^{1/2}.$$

It follows from Proposition 1.4 that a unitary matrix preserves the Euclidean norm metric; i.e.,

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \; \forall x.$$

The linear transformation associated with a unitary matrix Q is therefore an *isometry*.

The most commonly used vector norms in numerical linear algebra are special cases of the Hölder norms

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}. \tag{1.6}$$

Note that the limit of $\|x\|_p$ when p tends to infinity exists and is equal to the maximum modulus of the x_i's. This defines a norm denoted by $\|\cdot\|_\infty$. The cases $p = 1$, $p = 2$, and $p = \infty$ lead to the most important norms in practice:

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$
$$\|x\|_2 = \left[|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \right]^{1/2},$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

The Cauchy–Schwarz inequality of (1.2) becomes

$$|(x, y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

1.5 Matrix Norms

For a general matrix A in $\mathbb{C}^{n \times m}$, we define the following special set of norms:

$$\|A\|_{pq} = \max_{x \in \mathbb{C}^m, \, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_q}. \tag{1.7}$$

المحاضرة الثالثة

"الصفحة السابعة":

الخاصة (١.٢): المصفوفات الواحدية تحافظ على الجداء الداخلي الاقليدي: أي

$$(Qx, Qy) = (x, y)$$

من أجل أي مصفوفة واحدية Q وأي شعاعين x و y.

البرهان:

في الحقيقة:

$$(Qx, Qy) = (x, Q^H Q y) = (x, y)$$

نظم الشعاع ضمن فضاء شعاعي X هي دالة حقيقية $x \in X \longrightarrow \|x\|$ تحقق الشروط الثلاثة التالية:

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ and $\|x\| = 0$ iff $x = 0$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in X \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$

في الحالة الخاصة التي يكون فيها $X = \mathbb{C}^n$ نستطيع أن نربط الجداء الداخلي في (1.3) مع النظم الاقليدي لفضاء عقدي المعرف كالتالي:

$$\|x\|_2 = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

الخاصة (١.٤) أن المصفوفة الواحدية تحافظ على النظم الاقليدي المرتبط

$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x$$

إن التحويلات الخطية المرتبطة بالمصفوفة الواحدية Q هي تماسيس عندما أكثر النظم الشعاعية المستخدمة في الجبر الخطي العددي هي حالات خاصة من نظم هولدر

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

لاحظ أن نهاية $\|x\|_p$ عندما تسعى p إلى ∞ موجودة وتساوي القيمة العظمى للقيم x_i وهذا يعرف نظم يرمز له بالشكل $\|.\|_\infty$

الحالات $p=\infty, p=1, p=1$ تعتبر أهم النظم من حيث التطبيق

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \left[|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots n} |x_i|$$

متراجحة كوشي شوارتز تصح:

$$|(x,y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

1.5 نظم المصفوفة:

من أجل أي مصفوفة اختيارية A في فضاء المصفوفات العقدية من المرتبة n×m نعرف الجرعة الخاصة من النظم التالية:

$$\|A\|_{pq} = \max_{x \in \mathbb{C}^m, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_q}$$

انتهت المحاضرة الثالثة