المحاضرة السابقة:

التشاكلات المستخلصة:

ليكن $A, B$ مودولين على حلقة $R$ فإن $Hom_R(A,B)$ هي مجموعة التشاكلات المودولية التي منطلقها $A$ و مستقرها $B$.

وهي تشكل زمرة تبديلية بالنسبة إلى عملية جمع التطبيقات أي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

وبالتالي فهي مودول على الحلقة $\mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, dashed, "f\circ v"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

- إذا كان $f \in Hom_R(A,B)$ ولنتأمل المخطط

حيث $M$ مودول على $R$

وبذلك كل ~~مودول~~ تشاكل مودولي $f : A \longrightarrow B$

يعين تشاكلاً $f_* : Hom_R(M,A) \longrightarrow Hom(M,B)$

$$f_*(v) = f\circ v$$

$$\begin{tikzcd} & M \\ A \arrow[ur, dashed, "v\circ f"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

- وإذا كان المخطط على الشكل التالي:

إذن كل تشاكل $f : A \longrightarrow B$ يعين تشاكلاً

$$f^* : Hom_R(B,M) \longrightarrow Hom_R(A,M)$$

$$f^*(v) = v\circ f$$

- نسمي كل من $f_*$ ، $f^*$ تشاكلاً مستخلصاً من $f$

مبرهنة: إذا كان $f, h \in Hom(A,B)$ $\wedge$ $g, k \in Hom(B,C)$

فإن:

1/ $(f+h)_* = f_* + h_*$

2/ $(f+h)^* = f^* + h^*$

3/ $(g\circ f)_* = g_* \circ f_*$

4/ $(g\circ f)^* = f^* \circ g^*$

الإثبات: (1) ليكن $f+h : A \longrightarrow B$

$$(f+h)_* : Hom_R(M,A) \longrightarrow Hom_R(M,B)$$

حيث

$$f_* : Hom(M,A) \longrightarrow Hom(M,B)$$
$$h_* : Hom(M,A) \longrightarrow Hom(M,B)$$

فإن $f_* + h_* : Hom(M,A) \longrightarrow Hom(M,B)$

كأن أياً كان $v \in Hom(M,A)$ فإن

$$(f+h)_*(v) = (f+h)\circ v = f\circ v + h\circ v$$
$$= f_*(v) + h_*(v)$$
$$= (f_* + h_*)(v)$$

(2) يبرهن عليها بنفس طريقة (1).

(3) ليكن

$$f_* : Hom_R(M,A) \longrightarrow Hom_R(M,B)$$
$$g_* : Hom_R(M,B) \longrightarrow Hom_R(M,C)$$

فإن:

$$g_*\circ f_* : Hom(M,A) \longrightarrow Hom(M,C)$$
$$(g\circ f)_* : Hom(M,A) \longrightarrow Hom(M,C)$$

أياً كان $v \in Hom(M,A)$ فإن $(g\circ f)_*(v) = (g\circ f)\circ v$

$$= g\circ f\circ v \quad \mathrm{I}$$

من جهة أخرى:

$$(g_*\circ f_*)(v) = g_*(f_*(v)) = g_*(f\circ v)$$
$$= g\circ(f\circ v)$$
$$= g\circ f\circ v \quad \mathrm{II}$$

من I و II نجد أنه تم المطلوب.

(4) يبرهن بنفس أسلوب (3)

مبرهنة: (1) إذا كانت $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \longrightarrow 0$ متتالية تامة من التشاكلات المودولية فإن:

/(أ)/ المتتالية $0 \longrightarrow Hom(M,A') \xrightarrow{f_*} Hom(M,A) \xrightarrow{g_*} Hom(M,A'')$ هي متتالية تامة.

/ii/ المتتالية $0 \longrightarrow Hom(A'',M) \xrightarrow{g^*} Hom(A,M) \xrightarrow{f^*} Hom(A',M)$
هي متتالية تامة.

الإثبات: إذا لإثبات أن المتتالية تامة يكفي أن نبرهن $Im f_* = ker g_*$ و $f_*$ متباين

إذا كان $v, v' \in Hom(M,A')$ بحيث $f_*(v) = f_*(v')$ وبما أن $f$ متباين
فإنه يمكن اختزاله من اليسار، لأن المتتالية الموجودة بالبرهان تامة

$\Rightarrow f \circ v = f \circ v' \Rightarrow v = v'$

وبطريقة أخرى: إذا كان $v \in ker f_* \Rightarrow f_*(v) = 0 \Rightarrow f \circ v = 0$
وبما أن $f$ قابل للاختزال من اليسار، $\Rightarrow v = 0$ وبالتالي $f_*$ متباين.

إذا كان $v \in Im f_*$ بحيث $(v \in Hom(M,A))$ فإنه يوجد $v' \in Hom(M,A')$
بحيث $f_*(v') = v \Rightarrow f \circ v' = v$
وعندئذ يكون

$$g_*(v) = g(f \circ v') = g \circ (f \circ v') = (g \circ f) \circ v' = 0 \Rightarrow v \in ker g_*$$

ومنه I $\boxed{Im f_* \subseteq ker g_*}$

$\forall v \in ker g_* : (v \in Hom(M,A))$

فإن: $g_*(v) = 0 \Rightarrow g \circ v = 0 \Rightarrow Im v \subseteq ker g$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\theta"'] \arrow[d, "v"] \\ A' \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

$f$ متباين

نريد الآن أن نثبت وجود $\theta \in Hom(M,A')$
حيث $\theta$ تطبيق موضح بالشكل المجاور
وبحيث $v = f \circ \theta$ أي $v = f_*(\theta)$

ولوجود $\theta$ يجب أن نثبت $Im v \subseteq Im f$
لدينا $Im v \subseteq ker g$ ولدينا $Im f = Img$ لأن المتتالية ① تامة

$\Rightarrow \boxed{Im v \subseteq Im f}$ II

إذن يوجد $\theta \in Hom(M,A')$ بحيث يحقق
$v = f \circ \theta = f_*(\theta)$ #

ii) $0 \longrightarrow Hom(A'',M) \xrightarrow{g^*} Hom(A,M) \xrightarrow{f^*} Hom(A',M)$

هذه المتتالية لاثباتها أنها تامة يكفي أن نثبت $g^*$ متباينة

$Img^* = \ker f^*$

$\forall u'', v'' \in Hom(A'',M)$ ; $g^*(v'') = g^*(u'')$

$$v''\circ g = u''\circ g$$

وبما أن $g$ غامر فهو قابل للاختزال من اليمين ومنه $u'' = v''$

أي أن $g^*$ متباينة

أياً كان $v \in Img^*$ فإنه يوجد $v'' \in Hom(A'',M)$ بحيث

$v = g^*(v'') = v''\circ g$

وعندئذ فإن

$$\begin{aligned} f^*(v) &= f^*(v''\circ g) \\ &= (v''\circ g)\circ f \\ &= v''\circ \underbrace{(g\circ f)}_{0} = 0 \end{aligned}$$

أي أن $\boxed{Img^* \subseteq \ker f^*}$ I

$\forall v \in \ker f^*$ ; $f^*(v) = 0 \Rightarrow v\circ f = 0$

$\Rightarrow \boxed{Im f \subseteq \ker v}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g \text{ غامر}"'] & M \\ A'' \arrow[ur, dashed, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

لنأخذ المخطط ولنثبت وجود $\varepsilon$

بما أن $Im f = \ker g$ كون المتتالية ① تامة

فإن $\ker g \subseteq \ker v$

وبالتالي يوجد $\varepsilon$ بحيث $\varepsilon : A'' \longrightarrow M$ يحقق $\varepsilon\circ g = v$

أي $g^*(\varepsilon) = v$

وهذا يبين أن $v \in Img^*$ إذن $\boxed{\ker f^* \subseteq Img^*}$ II

من I و II نجد أنه قد تم المطلوب #

انتهت المحاضرة...