

المحاضرة السابقة:

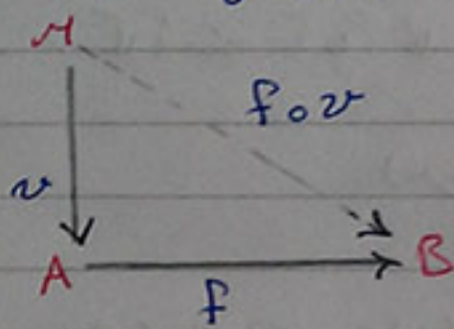
التشاكلات المتولدة:

ليكن A, B مودولين على حلقة R فإن $\text{Hom}_R(A, B)$ هي مجموعة التشاكلات المودولية التي منطلقها A و مستقرها B .

وهي تشكل زمرة تبديلية بالنسبة إلى عملية جمع التطبيقات أي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

وبالتالي فهي مودول على الحلقة \mathbb{Z}



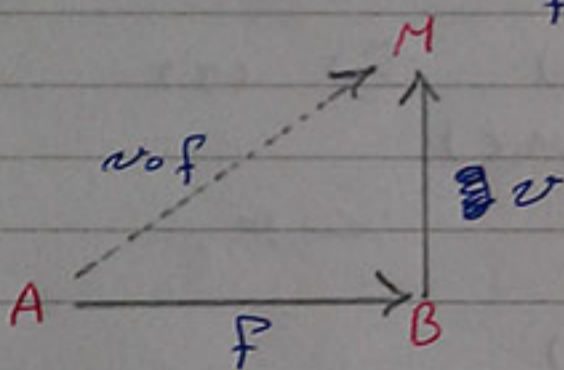
إذا كان $f \in \text{Hom}_R(A, B)$ ولنا مثل المخطط
 حيث M مودول على R

وبذلك كل مودول تشكل مودول $F: A \rightarrow B$

$$F_*: \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, B)$$

$$F_*(v) = f \circ v$$

وإذا كان المخطط على الشكل التالي:



فإن كل تشكل $F: A \rightarrow B$ يعين تشكل F^*

$$F^*: \text{Hom}_R(B, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M)$$

$$F^*(v) = v \circ f$$

نسبر كل من F^* , F_* تشكل متولداً من F

مبرهنة: إذا كان $f, h \in \text{Hom}(A, B)$ \wedge $g, k \in \text{Hom}(B, C)$ فإن:

$$1/ (f+h)_* = f_* + h_*$$

$$2/ (f+h)^* = f^* + h^*$$

$$3/ (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

$$4/ (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

الإثبات: (1) ليكن $f+h : A \rightarrow B$
 $(f+h)_* : \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, B)$
 جيداً

$$f_* : \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, B)$$

$$h_* : \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, B)$$

$$f_* + h_* : \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, B) \quad \text{فان}$$

كأن كان $v \in \text{Hom}(M, A)$ فان

$$\begin{aligned} (f+h)_*(v) &= (f+h) \circ v = f \circ v + h \circ v \\ &= f_*(v) + h_*(v) \\ &= (f_* + h_*)(v) \end{aligned}$$

(2) يبرهن على نفسه بطريقة (1).

$$f_* : \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, B) \quad \text{ليكن (3)}$$

$$g_* : \text{Hom}_R(M, B) \rightarrow \text{Hom}_R(M, C)$$

فان:

$$g_* \circ f_* : \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, C)$$

$$(g \circ f)_* : \text{Hom}(M, A) \rightarrow \text{Hom}(M, C)$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*(v) &= (g \circ f) \circ v \quad \text{فان } v \in \text{Hom}(M, A) \quad \text{أياً كان} \\ &= g \circ f \circ v \quad \text{Ⓐ} \quad g \circ (f \circ v) = (g \circ f) \circ v \quad \text{Ⓑ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g_* \circ f_*)(v) &= g_*(f_*(v)) = g_*(f \circ v) \\ &= g \circ (f \circ v) \\ &= g \circ f \circ v \quad \text{Ⓒ} \end{aligned}$$

من Ⓐ و Ⓒ و Ⓓ انه يتم المطلوب.

(4) يبرهن بنفسه المطلوب (3)

مبرهنة: إذا كانت ① $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$
 من التسلسلات المودولية فان:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A') \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(M, A) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(M, A'') \rightarrow 0 \quad \text{Ⓐ}$$

هي متسلسلة تامة.

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A'', M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(A, M) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(A', M) \quad \text{المسألة (ii) / هو مسألة عامة.}$$

الإببات: إذا لا يثبت أن المسألة عامة يكفي أن نبرهن $\text{Im } f_* = \text{ker } g_*$ $\xrightarrow{f_* \text{ حثية}}$

أياً كان $v, v' \in \text{Hom}(M, A')$ حيث $f_*(v) = f_*(v')$ وبما أن f حثية فإنه يمكن افتراضه من البيا، لانه المسألة الوحيدة بالبرهان عامة

$$\Rightarrow f \circ v = f \circ v' \Rightarrow v = v'$$

وبطريقة أخرى: أياً كان $v \in \text{ker } f_*$ $\Leftrightarrow f_*(v) = 0 \Leftrightarrow f \circ v = 0$

وبما أن f قابل لاقترال من البيا، $\Leftrightarrow v = 0$ وبالمثل f_* حثية.

- أياً كان $v \in \text{Im } f_*$ حيث $v \in \text{Hom}(M, A)$ فإنه يوجد $v' \in \text{Hom}(M, A')$

$$\text{حيث } f \circ v' = v \Rightarrow f_*(v') = v$$

وعندهذا يكون $g_*(v) = g(f \circ v')$

$$= g \circ (f \circ v')$$

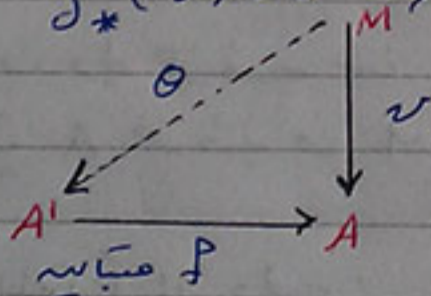
$$= (g \circ f) \circ v'$$

$$= 0 \Rightarrow v \in \text{ker } g_*$$

$$\text{Im } f_* \subseteq \text{ker } g_* \quad \text{I} \quad \text{وهذا}$$

$$\forall v \in \text{ker } g_* : (v \in \text{Hom}(M, A))$$

$$g_*(v) = 0 \Rightarrow g \circ v = 0 \Rightarrow \text{Im } v \subseteq \text{ker } g$$



نريد الآن أن نثبت وجود $\theta \in \text{Hom}(M, A')$

حيث θ تطبيق موحد بالسكر المبادر

$$\text{وحيث } v = f \circ \theta \text{ أي } v = f_*(\theta)$$

ولوجود θ يجب أن نثبت $\text{Im } v \subseteq \text{Im } f$

لدينا $\text{Im } v \subseteq \text{ker } g$ ولدينا $\text{Im } f = \text{Im } g$ لان المسألة (i) عامة

$$\Rightarrow \text{Im } v \subseteq \text{Im } f \quad \text{II}$$

أذن يوجد $\theta \in \text{Hom}(M, A')$ حيث يحققه

$$v = f \circ \theta = f_*(\theta) \quad \#$$

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A'', M) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(A, M) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(A', M) \quad / \quad \text{I, II}$$

هذه المسألة لإثباتها الرتبة نأهه يكفي أن نثبت g^* متباينة
 $\text{Im } g^* = \ker f^*$

$$\forall u'', v'' \in \text{Hom}(A'', M) ; g^*(v'') = g^*(u'')$$

$$v'' \circ g = u'' \circ g$$

وبما أن g غامر فهو قابل للاقتزال عن العيينة وحده
 أي أن g^* متباينة

أيًا كان $v \in \text{Im } g^*$ فإن يوجد $v'' \in \text{Hom}(A'', M)$ حيث

$$v = g^*(v'') = v'' \circ g$$

$$f^*(v) = f^*(v'' \circ g)$$

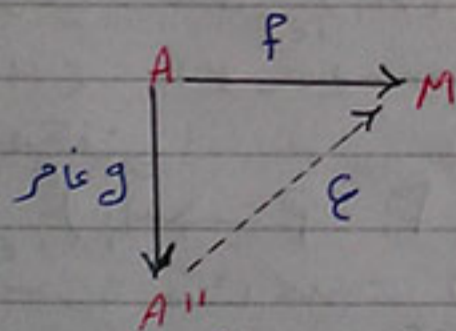
$$= (v'' \circ g) \circ f$$

$$= v'' \circ (g \circ f) = 0$$

$$\text{Im } g^* \subseteq \ker f^* \quad \text{I} \quad \text{أي أن}$$

$$\forall v \in \ker f^* ; f^*(v) = 0 \Rightarrow v \circ f = 0$$

$$\Rightarrow \text{Im } f \subseteq \ker v$$



لأنه هذا المخطط ولسبب وجود ϵ

بما أن $\text{Im } f = \ker g$ كون المسألة ① نأهه

فإن $\ker g \subseteq \ker v$

وبالتالي يوجد ϵ حيث $\epsilon \circ g = v$ كيقه $\epsilon : A'' \rightarrow M$

$$g^*(\epsilon) = v$$

وهذا يبين أن $v \in \text{Im } g^*$ إذنه $\text{ker } f^* \subseteq \text{Im } g^*$ II

من I و II كما أنه قد تم المطلوب #

انتهت المحاضرة ...