المحاضرة الثامنة        الخميس 23/10/2014

## الحركة الدورانية للجسم الصلب حول نقطة ثابتة

الدراسة التحليلية مطلوبة

تعريفها: هي حركة جسم صلب ثبتت منه نقطة واحدة

وقد رأينا أن للجسم في هذه الحالة ثلاث درجات حرية أي أن موضع أي نقطة من الجسم يتعين بدلالة ثلاث احداثيات معممة فقط.

* للحركة ثلاث معادلات حركة

نظرية أولر - دالمبير: « النظرية الأساسية للحركة الدورانية حول نقطة »:

إذا ثبتت في الجسم نقطة واحدة فهناك في كل لحظة مستقيم يمر من تلك النقطة الثابتة تكون سرع نقطه معدومة في اللحظة المذكورة

بمعنى آخر: حركة الجسم الصلب الدورانية حول نقطة ثابتة هي حركة دورانية في كل لحظة من الزمن حول محور يمر من تلك النقطة نسميه المحور الآني للدوران.

الاثبات: سؤال دورة متكرر كثيراً (حوالي 30 درجة)

ليكن $S$ الجسم الصلب و $O$ نقطة ثابتة منه وليكن $A, B \in S$ بحيث $O, A, B$ ليست على استقامة واحدة

ولنفرض أن: $\vec{v}(A) \neq \vec{0}$, $\vec{v}(B) \neq \vec{0}$, $\vec{v}(A) \neq \vec{v}(B)$ , $\vec{v}(A) \nparallel \vec{v}(B)$

لأنه: لو كانت $\vec{v}(A) = \vec{0}$ ⇐ $OA$ محور آنياً للدوران والنظرية محققة

ولو كانت $\vec{v}(B) = \vec{0}$ ⇐ $OB$ محور آنياً للدوران والنظرية محققة

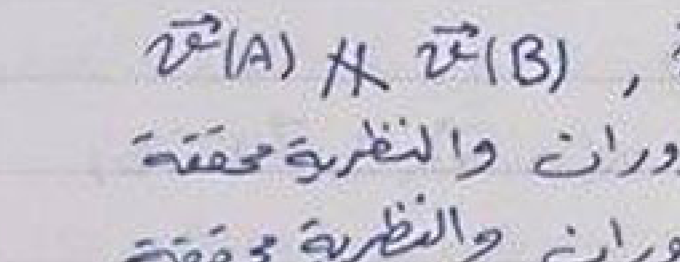
إذاً لنفرض أن $\vec{v}(A) \neq \vec{0}$ و $\vec{v}(B) \neq \vec{0}$

ولو كانت $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$ فإن الحركة انسحابية وتكون $O$ غير ثابتة وهذا مخالف للفرض.

لو كانت $\vec{v}(A) \parallel \vec{v}(B)$ حينئذٍ قد تكون نظرية المساقط غير محققة

إذن $\vec{v}(A) \nparallel \vec{v}(B)$ ولنبرهن النظرية في هذه الشروط.

نطبق نظرية المساقط على النقطتين $O, A$




$$\vec{OA} \cdot \vec{v}(O) = \vec{OA} \cdot \vec{v}(A)$$

$\vec{0}$ لأن $O$ ثابتة

$$\Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{v}(A) = 0 \Rightarrow \vec{v}(A) = \vec{0}$$

$\perp \vec{OA}$

$\vec{v}(A) = \vec{0}$ مرفوض لأنه مخالف للفرض

نطبق نظرية المساقط على النقطتين $O, B$

$$\vec{OB} \cdot \vec{\varepsilon}(O) = \vec{OB} \cdot \vec{\varepsilon}(B)$$

$\vec{0}$ لأن $O$ ثابتة

$\Rightarrow \vec{OB} \cdot \vec{\varepsilon}(B) = 0 \Rightarrow \vec{\varepsilon}(B) = \vec{0}$ مرفوض مخالف للفرض

$\perp \vec{OB}$

لنسمي مستويان $\pi_1$ و $\pi_2$ كحققات:

$\pi_1$ يحوي $\vec{OA}$ ويعامد $\vec{\varepsilon}(A)$

$\pi_2$ يحوي $\vec{OB}$ ويعامد $\vec{\varepsilon}(B)$

لنأخذ $A_1 \in \pi_1$ و $B_1 \in \pi_2$

نطبق نظرية المساقط على النقاط $O, A_1$ و $A, A_1$

$$\vec{OA_1} \cdot \underbrace{\vec{\varepsilon}(O)}_{\vec{0}} = \vec{OA_1} \cdot \vec{\varepsilon}(A_1)$$

$\Rightarrow \vec{\varepsilon}(A_1) = \vec{0}$ أو $\perp \vec{OA_1}$ (1)

$$\vec{AA_1} \cdot \vec{\varepsilon}(A_1) = \underline{\vec{AA_1} \cdot \vec{\varepsilon}(A)}$$

$= 0$ (لأن $\vec{AA_1} \perp \vec{\varepsilon}(A)$ ⊂ $\pi_1$)

$\Rightarrow \vec{\varepsilon}(A_1) = \vec{0}$ أو $\perp \vec{AA_1}$ (2)

من (1) و (2) نجد: $\vec{\varepsilon}(A_1) = \vec{0}$ أو $\perp \vec{OA_1} \wedge \vec{AA_1}$

وبالتالي: $\vec{\varepsilon}(A_1) = \vec{0}$ أو $\perp \pi_1$

بنفس الطريقة نبرهن أن: $\vec{\varepsilon}(B_1) = \vec{0}$ أو $\perp \pi_2$

إن $\pi_1$ و $\pi_2$ تشتركان بالنقطة $O$ فهما يشتركان بالفصل المشترك المار من $O$

وليكن $\Delta$ الفصل المشترك لهما

لنأخذ $O_1 \in \Delta \Leftarrow O_1 \in \pi_1 \wedge O_1 \in \pi_2$

$\Leftarrow \vec{\varepsilon}(O_1) = \vec{0}$ أو $\perp \pi_1$

$\Rightarrow \vec{\varepsilon}(O_1) = \vec{0}$ أو $\perp \pi_2$

$\Rightarrow \vec{v}(O,1) = \vec{0}$ $\Rightarrow \vec{v}(O,1) = \vec{0}$

مرفوض $\perp \pi_1 , \wedge \perp \pi_2$

وبالتالي محور آني للدوران لأن سرع نقاطه معدومة.

ملاحظات:

* إن المحور الآني للدوران موجود في كل لحظة ويختلف موضعه بالنسبة للفراغ الثابت وبالنسبة للفراغ المتماسك مع الجسم في كل لحظة.
* إن تغير موضع المحور الآني في الفراغ الثابت مع مرور الزمن يرسم سطحاً مخروطياً نسميه مخروط القاعدة.

القاعدة: هي المحل الهندسي للمحور الآني للدوران في الجملة الثابتة.

* إن المحور الآني للدوران غير ثابت في الجسم أيضاً أي أن حركته ترسم سطحاً مخروطياً جديداً نسميه مخروط المتدحرج.

المتدحرج: هو المحل الهندسي للمحور الآني للدوران في الجملة المتماسكة.

* إن القاعدة والمتدحرج يشتركان في كل لحظة بمستقيم نسميه المولد المشترك وهو المحور الآني للدوران.
* إذا تحرك جسم صلب بالنسبة إلى جسم صلب ثابت وكانت سرعة نقاط التماس معدومة فإن حركة الجسم في هذه اللحظة تدعى بحركة تدحرج دون انزلاق.
* الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة تتم بتدحرج سطح مخروطي متماسك مع الجسم على سطح مخروطي ثابت في الفراغ دون انزلاق.
* مثال على الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة هي حركة البلبل.

شعاع الموضع: $\forall M \in S$ فإن:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

حيث $x, y, z$ مقادير ثابتة , $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ مقادير متغيرة , $O$ نقطة ثابتة.

توزع السرع: $\forall M \in S$ فإن:

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

آني نقطة ثابتة

فبما أن الحركة الدورانية حول نقطة ثابتة هي حركة دورانية حول محور آني يمر من النقطة الثابتة فإن عبارة السرعة هي:

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

آني نقطة ثابتة

مبرهنة: إن شعاع الدوران $\vec{\omega}$ لا يتعلق بالنقطة $M$ أي لا يتغير من نقطة إلى أخرى في كل لحظة.

الإثبات: $\forall A, B \in S$

في لحظة ما يكون:

$$\vec{v}(A) = \vec{\omega}_A \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{v}(B) = \vec{\omega}_B \wedge \vec{OB}$$

نطبق نظرية المساقط على النقطتين $A, B$ فنجد:

$$\vec{AB} \cdot \vec{v}(A) = \vec{AB} \cdot \vec{v}(B)$$

$$\vec{AB} \cdot (\vec{\omega}_A \wedge \vec{OA}) = \vec{AB} \cdot (\vec{\omega}_B \wedge \vec{OB})$$

جداء مختلط

$$(\vec{AB}, \vec{\omega}_A, \vec{OA}) = (\vec{AB}, \vec{\omega}_B, \vec{OB})$$

خواص الجداء المختلط

$$(\vec{OA} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_A = (\vec{OB} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_B$$

$$(\vec{OA} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_A = [(\vec{OA} + \vec{AB}) \wedge \vec{AB}] \cdot \vec{\omega}_B$$

$$(\vec{OA} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_A = (\vec{OA} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_B + \underbrace{(\vec{AB} \wedge \vec{AB})}_{=\vec{0}} \cdot \vec{\omega}_B$$

$$(\vec{OA} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_A = (\vec{OA} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{\omega}_B$$

$$\vec{C} \cdot \vec{\omega}_A = \vec{C} \cdot \vec{\omega}_B$$

بما أن $\vec{\omega}_A$ توازي $\vec{\omega}_B$ لأنهما محمولان على محور الدوران فلهما نفس المنحى وبالتالي يصنعان مع الشعاع $\vec{C}$ نفس الزاوية أي نستطيع اختصار $\vec{C}$ وبالتالي يكون:

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \vec{\omega}$$

وبالتالي:

$$\forall M \in S \Rightarrow \vec{v}(M) = \underset{\text{آني}}{\vec{\omega}} \wedge \vec{OM}$$

ثابتة

شعاع التسارع:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} - \omega^2 \cdot \vec{mM}$$

مسقط $M$ على محور الدوران الآني:

انتهت المحاضرة