عوامل التكامل

إذا لم تكن المعادلة:

$$① \quad --- \quad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

تامة، فإنه إذا وجدت دالة من الشكل

$$\mu = \mu(x,y)$$

وضربنا بها طرفي المعادلة ① :

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

فأصبحت تامة، فإننا نسمي الدالة $\mu = \mu(x,y)$ بعامل تكامل ①

(تحولها من غير المعادلة تامة)

هل يمكن إيجاد عامل التكامل ؟!

I إيجاد عامل التكامل:

إذا كان

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\mu(x,y)M(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x,y)N(x,y))}{\partial x}$$

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$② \quad ---- \quad M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

نميز ما يلي:

- عامل التكامل تابع لـ x فقط أي: $\mu(x,y) = \mu(x)$.

من العلاقة ② نجد:

$$-N\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\frac{\partial\mu}{\partial x}}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

نرمز للمقدار :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \Psi(x)$$

بفصل المتغيرات $\Rightarrow$

$$\frac{\partial\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx$$

$$\mu_{(x)} = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx} = e^{\int \Psi(x)\,dx}$$

- عامل التكامل تابع لـ y فقط : أي : $\mu_{(x,y)} = \mu(y)$

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\frac{\partial\mu}{\partial y}}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

نرمز للمقدار :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \Psi(y)$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \, dy$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} dy} = e^{\int \psi(y)\, dy}$$

مثال: أوجد عامل التكميل ثم الحل العام للمعادلة التالية

① $(1 - x^2 y)\, dx + x^2(y - x)\, dy = 0$

$M(x,y) = 1 - x^2 y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -x^2$

$N(x,y) = x^2 y - x^3 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2$

إذاً المعادلة غير تامة

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y-x)} = \frac{2x^2 - 2xy}{x^2(y-x)}$$

$$= \frac{2x(x-y)}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x} \rightarrow$$ ليس عامل تكميل ← حسب الإشارة

$$\mu = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{\ln x^{-2}}$$

عامل التكميل $\boxed{\mu(x) = \frac{1}{x^2}}$

نضرب طرفي المعادلة ① بعامل التكميل فتصبح تامة:

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right) dx + (y - x)\, dy = 0$$

$$\frac{1}{x^2} dx - y\, dx + y\, dy - x\, dy = 0$$

$$-d\frac{1}{x} + \frac{1}{2}dy^2 - d(x \cdot y) = 0$$

$$\boxed{-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}y^2 - (x \cdot y) = c}$$

مثال: أوجد عامل التكامل ثم الحل العام؟

(1) --- $(x^2+y^2+x)\,dx + xy\,dy = 0$

$$M = x^2+y^2+x \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$N = xy \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

إذاً المعادلة غير تامة

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x}$$

عامل التكامل $\boxed{\mu(x) = x}$

نضرب طرفي المعادلة (1) بعامل التكامل فتصبح تامة:

$$x(x^2+y^2+x)\,dx + x^2y\,dy = 0$$

$$(x^3+xy^2+x^2)\,dx + x^2y\,dy = 0$$

$$x^3dx + x^2dx + (xy^2dx + x^2y\,dy) = 0$$

$$d\frac{x^4}{4} + d\frac{x^3}{3} + d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} = c}$$

مثال

$$(6xy+3y^2x+x^3)\,dy+3(x^2+y^2)\,dx=0$$

$$M=3(x^2+y^2)\quad,\quad \frac{\partial M}{\partial y}=6y$$

$$N=6xy+3y^2x+x^3\quad,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=6y+3y^2+3x^2$$

إذاً المعادلة غير تامة

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{6y-6y-3y^2-3x^2}{-3(x^2+y^2)}=1$$

$$\mu=e^{\int dy}=e^{y}$$

$$\boxed{\mu(y)=e^{y}}$$ عامل التكامل

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل فتصبح تامة

ونتابع :

- عامل التكامل تابع لـ $x.y$ إذا : $\mu(x,y)=\mu(x.y)$

يأخذ الشكل التالي :

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=Z(x.y)$$

/ /

- عامل التكامل تابع لـ $x+y$:

$$\mu = \mu(x+y)$$

إذا الشكل التالي :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - M} = G(x+y)$$

- عامل التكامل تابع لـ x^2+y^2 :

$$\mu = \mu(x^2+y^2)$$

إذا الشرط الشكل التالي :

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2(yM - xN)} = H(x^2+y^2)$$

- عامل التكامل لبعض المعادلات الشهيرة

① المعادلة التفاضلية ذات المتحولات القابلة للفصل

$$f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + \frac{g_2(x)}{g_1(x)}\, dy = 0$$

عامل التكامل :

$$\frac{1}{g_1(y)\, f_2(x)}$$