المحاضرة السادسة

الخميس 16/10/2014

تمرين:

تتحرك اسطوانة بحركة دورانية حول محور ثابت وتكون معادلة حركتها هي:

$\theta = a\log\left(1+\frac{w_0 t}{a}\right)$ بحيث w_0 , a ثابتان والمطلوب:

1- تعيين شعاع الدوران وشعاع التسارع الزاوي.

2- تعيين سرعة وتسارع نقطة ما من الجسم تبعد عن محور الدوران بالمقدار R.

3- تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع الناظمي والتسارع الكلي.

4- تعيين القيمة الحدية للسرعة والتسارع عندما $t \to \infty$

الحل:

1- شعاع الدوران:

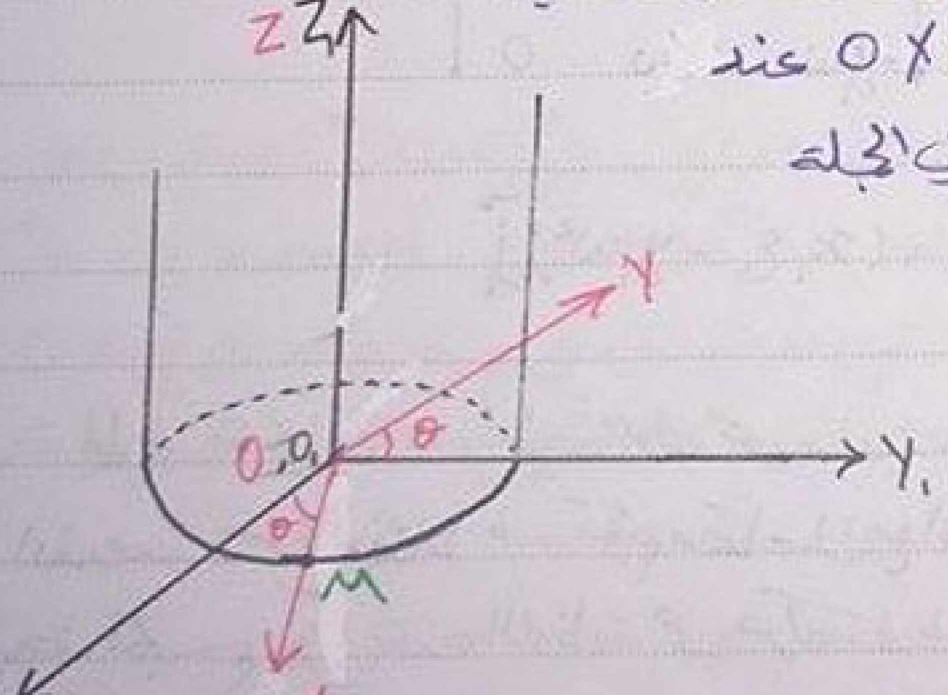
$$\vec{w} = \theta^{\cdot}\vec{k} = \theta^{\cdot}\vec{k}_1 = a\,\frac{\frac{w_0}{a}}{1+\frac{w_0}{a}t}\,\vec{k} = a\,\frac{w_0}{a+w_0 t}\,\vec{k}$$

شعاع التسارع:

$$\vec{\varepsilon} = \theta^{\cdot\cdot}\vec{k} = \theta^{\cdot\cdot}\vec{k}_1 = -\frac{a w_0^2}{(a+w_0 t)^2}\,\vec{k}$$

نلاحظ أن الحركة متباطئة لأن $\vec{\varepsilon}$ و $\vec{w}$ بجهتين مختلفتين.

2- نختار M للسهولة واقعة على أحد محاور الدوران في الجملة المتماسكة OXYZ وليكن OX عند نأخذ M(R,0,0) عندئذ السرعة في الجملة الثابتة تعطى بالعلاقة:



$$\vec{v}(M) = \vec{w}\wedge\vec{OM}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & w \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

وبالتالي السرعة على الجملة المتماسكة هي:

$$\vec{v}(M) = R w \vec{j}$$

وتعطى السرعة في الجملة الثابتة بالعلاقة $\vec{v}(M) = \vec{w}\wedge\vec{O_1M}$

ولكن: $\vec{O_1M} = R\vec{i} = R\cos\theta\,\vec{i}_1 + R\sin\theta\,\vec{j}_1$

وبالتالي:

$$\vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & w \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

وبالتالي السرعة على الجملة الثابتة هي :

$$\vec{v}(M) = -wR\sin\theta\,\vec{i}_1 + wR\cos\theta\,\vec{j}_1$$

ملاحظة هامة :

لا يمكن الحصول على التسارع في الجملة المتحركة من اشتقاق علاقة السرعة لذلك نلجأ لتطبيق العلاقة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{w} \wedge \vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & w \\ 0 & wR & 0 \end{vmatrix}$$

وبالتالي التسارع في الجملة المتحركة هو :

$$\vec{\Gamma}(M) = -w^2R\,\vec{i} + \varepsilon R\,\vec{j}$$

التسارع في الجملة الثابتة يمكن الوصول إليه بطريقتين :

$\boxed{\text{الطريقة الأولى :}}$ تطبيق العلاقة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_1M} + \vec{w} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ R\cos\theta & R\sin\theta & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & w \\ -wR\sin\theta & wR\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-\varepsilon R\sin\theta - w^2R\cos\theta)\,\vec{i}_1 + (\varepsilon R\cos\theta - w^2R\sin\theta)\,\vec{j}_1$$

$\boxed{\text{الطريقة الثانية :}}$ نشتق علاقة السرعة في الجملة الثابتة أي :

نشتق العلاقة $\vec{v}(M) = -wR\sin\theta\,\vec{i}_1 + wR\cos\theta\,\vec{j}_1$ مع مراعاة أن

w, θ متغيران مستقلان واشتقاقهما جداء وبالتالي يكون :

$$\vec{\Gamma}(M) = (-\varepsilon R\sin\theta - wR\theta'\cos\theta)\,\vec{i}_1 + (\varepsilon R\cos\theta - wR\theta'\sin\theta)\,\vec{j}_1$$

$$\vec{\Gamma}(M) = (-\varepsilon R\sin\theta - w^2R\cos\theta)\,\vec{i}_1 + (\varepsilon R\cos\theta - w^2R\sin\theta)\,\vec{j}_1$$

3- لتعيين التسارع المماسي والناظمي نعينه إما في الجملة الثابتة أو المماسية في الجملة المماسية من العلاقة:

$$\vec{\Gamma}(M) = -\omega^2 R\,\vec{i} + \varepsilon R\,\vec{j}$$

وبالتالي:

التسارع المماسي هو: $\vec{\Gamma}_T(M) = \varepsilon R\,\vec{j}$ وقيمته $|\vec{\Gamma}_T(M)| = \varepsilon R$

التسارع الناظمي هو: $\vec{\Gamma}_N(M) = -\omega^2 R\,\vec{i}$ وقيمته $|\vec{\Gamma}_N(M)| = \omega^2 R$

وإن قيمة التسارع الكلي هي:

$$|\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{(-\omega^2 R)^2 + (\varepsilon R)^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

4- نعين قيمة من الجملة الثابتة أو المماسية أي من العلاقة:

$$\vec{v}(M) = R\omega\,\vec{j}$$

وبالتالي قيمة السرعة هي: $|\vec{v}(M)| = R\omega$

قيمة السرعة عندما $t \to \infty$:

$$|\vec{v}(M)| = R\omega = R\,\frac{\omega_0}{a+\omega_0 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

قيمة التسارع عندما $t \to \infty$:

$$|\vec{\Gamma}(M)| = R\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2} = R\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{a+\omega_0 t}\right)^4 + \left(-\frac{a\,\omega_0^2}{(a+\omega_0 t)^2}\right)^2} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

وبالتالي نستنتج أن الحركة هي حركة متباطئة.

الفصل الرابع الحركة اللولبية لجسم صلب

تعريفها: هي حركة جسم صلب ينسحب فيه مستقيم محدد على حامله بحيث ترسم كل نقطة فيه لولب دائري ويكون هنا لدينا حركتان انسحابية ودورانية

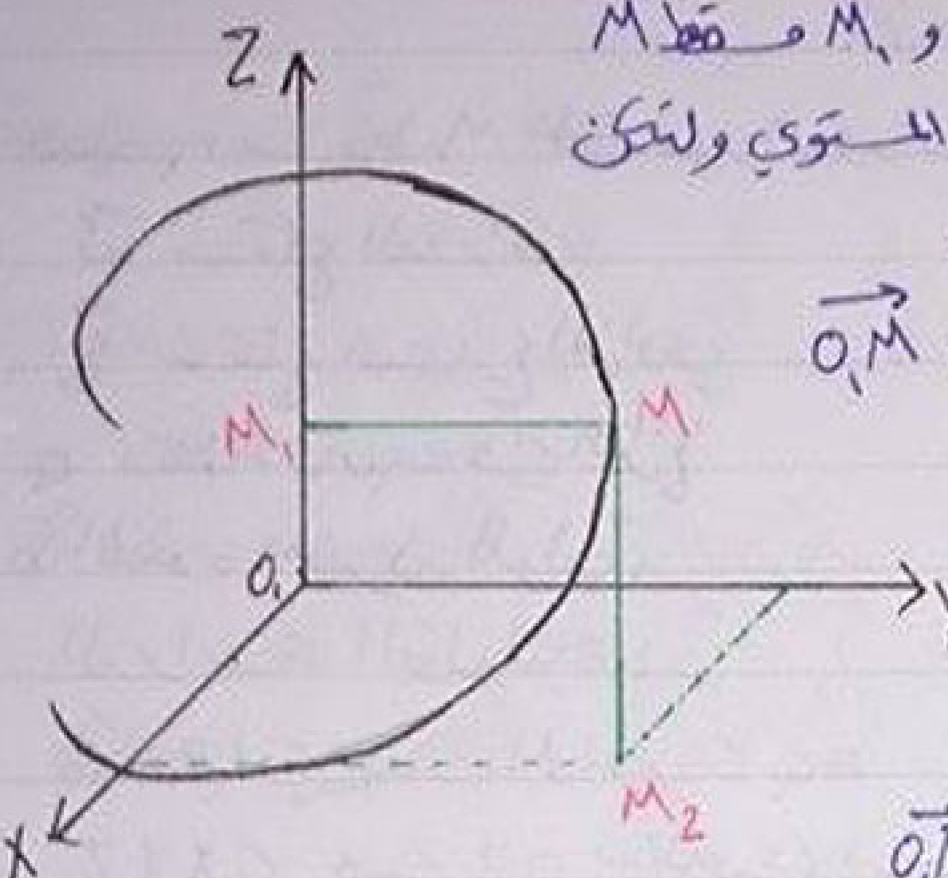
* تتحرك النقاط بحيث تبقى خطوة اللولب كلها متساوية أثناء الحركة أي أن الجسم يستطيع في هذه الحالة الدوران حول مستقيم ثابت والانسحاب على هذا المستقيم.

* وبالتالي يكون لدينا وسيطان للحركة هما زاوية الدوران θ والانسحاب z لكننا نعلم أن اللولب يتميز بخاصية أن النقاط تسحب بمقدار يتناسب مع زاوية الدوران وهو $z = b\,\theta$ وبالتالي أصبح لدينا وسيط واحد للحركة وهو زاوية الدوران θ أي لدينا درجة حرية واحدة.

* نسمي b الخطوة المختزلة للولب وفي حالة خاصة إذا دار الجسم دورة كاملة أي $\theta = 2\pi$ عندئذ نرمز لـ z بـ B ونعطى بالعلاقة $B = 2\pi b$ وتسمى خطوة اللولب.

إذاً مسارات النقاط هي لوالب دائرية متساوية الخطو ترسم على اسطوانات لها نفس المحور ولكنها ذات أنصاف أقطار متغيرة.

تعيين شعاع موضع وشعاع سرعة نقطة تتحرك بحركة لولبية:



لتكن M نقطة ما من الجسم الصلب و M_1 مسقط M على محور الدوران و M_2 مسقطها على المستوي ولتكن O_1 نقطة ثابتة في الفراغ عندئذ:

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1M_1} + \vec{M_1M} = s\vec{u} + \vec{M_1M}$$

$$\vec{O_1M} = b\theta\vec{u} + \vec{M_1M}$$

حيث $\vec{u}$ شعاع واحدة محور الدوران.

ولنفرض O نقطة ما من محور الدوران نجد:

$$\vec{O_1M} = b\theta\vec{u} + \vec{OM}$$

شعاع السرعة:

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(M_1) + \vec{v}(M_2) = \underbrace{s'\vec{u}}_{\text{حركة انسحابية}} + \underbrace{\vec{\omega}\wedge\vec{O_1M_2}}_{\text{حركة دورانية}}$$

$$\vec{v}(M) = b\theta'\vec{u} + \vec{\omega}\wedge(\vec{O_1M} + \vec{MM_2}) = b\vec{\omega} + \vec{\omega}\wedge\vec{O_1M}$$

لأن $\vec{\omega}\wedge\vec{MM_2} = \vec{0}$ الشعاعان متوازيان

ومن أجل O نقطة كيفية من محور الدوران نجد:

$$\vec{v}(M) = b\vec{\omega} + \vec{\omega}\wedge\vec{OM}$$

انتهت المحاضرة