المعادلات التفاضلية من مراتب عليا

1) المعادلة التفاضلية من المرتبة n في التابع y والمتحول المستقل x هي من الشكل

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

حيث $y^{(n)}$ هو المشتق من المرتبة n للتابع y بالنسبة للمتحول المستقل x ، و

$n \geq 2$ «ويؤدي إلى n ثابت كيفي»

الحل العام للمعادلة (1) هو تابع لـ x و y ، ويحوي n ثابت اختياري، أي

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

أي محلولة بالنسبة لأعلى المشتقات مرتبة (يعني المعادلة (1))

نقدم أولاً بعض أنواع من المعادلات التفاضلية من المرتبة n وطرق حلها

ثم نأتي إلى الدراسة التفصيلية للمعادلات الخطية من المرتبة n.

نبدأ بالحالة الخاصة التي تكون فيها المعادلة من الشكل التالي

لو أخذنا المعادلة من الشكل (2) $F(x, y^{(n)}) = 0$ (تحوي x فقط بدون y)

وننظر في الحالات التالية:

المعادلة (2) محلولة بالنسبة لـ $y^{(n)}$ أي من الشكل:

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (3)$$

من الواضح أننا نحصل على y (الحل العام) لهذه المعادلة التفاضلية بإجراء عدد n من التكاملات المتتالية.

حالة ثانية: إذا كان y_1 حلاً خاصاً للمعادلة (3) فيمكن بالتحويل $y = y_1 + Z$ رد المعادلة (3) إلى معادلة تفاضلية من الشكل:

$$Z^{(n)} = 0 \qquad (4)$$

وحل هذه المعادلة هو كثير حدود في x من الدرجة (n-1): أي يكون لدينا

$$(5) \qquad Z = P_{n-1}(x) = C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \dots + C_1 x + C_0$$

أما الحل الخاص y_1 للمعادلة (3) فيحقق

$$y_1^{(n)} = f(x)$$

وبالتالي على أخذه من الشكل

$$y_1 = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx$$

نكامل n مرة

على الحصول على حل خاص للمعادلة التفاضلية ③ ويحقق شروطاً ابتدائياً مفروضة باستخدام دستور تايلور التكاملي:

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \cdots + y_0^{(n-1)} \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)\, f(t)\, dt \quad \text{—— ⑥}$$

فالحل العام يكون:

$$y = \int dx \int dx \int dx \ldots\ldots \int f(x)\,dx + P_{n-1}(x)$$

حيث $f(t)$ تابع مستمر في المجال (x_0, x)

و

$$y_0 = y(x_0)$$
$$y_0' = y'(x_0)$$
$$\vdots$$
$$y_0^{(n)} = y^{(n)}(x_0)$$

مثال :

$$y^{(4)} = e^x$$

نلاحظ أن

$$y_1 = e^x$$ (كاملنا 4 مرات)

حل خاص

$$\Rightarrow y = y_1 + P_3(x)$$

$$y = e^x + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

المعادلات التفاضلية القابلة لخفض المرتبة.

① المعادلة التفاضلية لا تحوي y (الدالة y) يكون لها الشكل:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

يمكن خفض رتبة هذه المعادلة لتصبح معادلة تفاضلية من المرتبة $(n-k)$ وذلك بأخذ $z = y^{(k)}$ تابع جديد (إجراء التحويل)

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$$

فإذا الحل العام:

$$z = \phi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

نحصل ع المعادلة التفاضلية

$$y^{(k)} = \phi(x, c_1, \ldots, c_{n-k})$$

وهي من نوع المعادلة ③

مثال:

$$y''' = e^x$$

أوجد الحل العام للمعادلة ثم أوجد الحل الخاص المحقق للشروط

$$y''(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 2$$

$$y'' = e^x + c_1$$

$$y' = e^x + c_1 x + c_2$$

$$y = e^x + \tfrac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

$$y''(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow y'' = e^x$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + 0 + c \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow y' = e^x$$

$$2 = 1 + 0 + 0 + c_3 \Rightarrow \boxed{c_3 = 1} \Rightarrow y = e^x + 1$$

الحل الخاص

$$\boxed{y = e^x + 1}$$

$$y''^2 - 5y'' + 6 = 0$$

$$(y'' - 3)(y'' - 2) = 0$$

$$y'' - 3 = 0 \Rightarrow y'' = 3$$

$$\Rightarrow y' = 3x + c_1$$

$$\boxed{y = \frac{3}{2}x^2 + c_1 x + c_2}$$

أو :

$$y'' = 2 \Rightarrow y' = 2x + c_3$$

$$\boxed{y = x^2 + c_3 x + c_4}$$

الحل العام هو ضربهم

$$\left(\tfrac{3}{2}x^2 + c_1 x + c_2\right)\left(x^2 + c_3 x + c_4\right) = 0$$

..انتهت المحاضرة..