المحاضرة الثالثة :

مبرهنة :

إذا كان $f: M \longrightarrow N$ تشاكلاً مودولياً و كان $X \subseteq M$ مودولاً جزئياً من M

وَ كان $Y \subseteq N$ مودولاً جزئياً من N فإن :

/I/ $\overrightarrow{f}(X)$ مودول جزئي من N .

/II/ $\overleftarrow{f}(Y)$ مودول جزئي من M .

الإثبات :/I/ نلاحظ أن $0_N \in \overrightarrow{f}(X)$ لأن $0_N = f(0_M)$

ونلاحظ وضوحاً أن $f(X) \subseteq N$

ومنه $\emptyset \neq f(X) \subseteq N$

من جهة أخرى أياً كان $y_1, y_2 \in \overrightarrow{f}(X) \wedge \alpha \in R$ فإن

$y_i = f(x_i)\ ;\ x_i \in X \quad ; i = 1, 2$

وبالتالي $\alpha y_1 + y_2 = \alpha f(x_1) + f(x_2)$

وبما أن f تشاكل مودولي فإن $\alpha f(x_1) + f(x_2) = f(\underbrace{\alpha x_1 + x_2}_{\in X})$

$\Rightarrow f(\alpha x_1 + x_2) \in \overrightarrow{f}(X)$

ومنه فإن $\overrightarrow{f}(X)$ مودول جزئي من N #

/II/ إن $0_M \in \overleftarrow{f}(Y)$ لأن $f(0_M) = 0_N \in Y$

ولدينا $\overleftarrow{f}(Y) \subseteq M$ أي $\emptyset \neq \overleftarrow{f}(Y) \subseteq M$

أياً كان $x_1, x_2 \in \overleftarrow{f}(Y) \wedge \alpha \in R$ فإن $f(x_i) \in Y\ ;\ i = 1, 2$

عندئذٍ :

$f(\alpha x_1 + x_2) = \overbrace{\alpha \underset{\overset{\cap}{Y}}{f(x_1)} + \underset{\overset{\cap}{Y}}{f(x_2)}}^{\text{تشاكل مودولي}} \in Y$

ومنه $\alpha x_1 + x_2 \in \overleftarrow{f}(Y)$

إذن $\overleftarrow{f}(Y)$ مودول جزئي من M

نتيجة: إذا كان $f: M \longrightarrow N$ تشاكلاً موديولياً فإن

$Im(f) = \overrightarrow{f}(M)$ موديول جزئي من N

$\ker f = \overleftarrow{f}(0)$ موديول جزئي من M

مبرهنة: ليكن $f: X \longrightarrow Y$ تطبيق ولنكن $B \subseteq Y$ ، $A \subseteq X$

عندئذ: 1 - $\overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(A)) \supseteq A$ وتتحقق المساواة إذا كان f متباين

2 - $\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(B)) \subseteq B$

مبرهنة: إذا كان $f: M \longrightarrow N$ تشاكلاً موديولياً وكان A موديولاً جزئياً من M و B موديولاً جزئياً من N. فإن

1 - $\overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(A)) = A + \ker f$

2 - $\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(B)) = B \cap Im\ f$

الإثبات: 1

$$x \in \overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(A)) \Rightarrow f(x) \in \overrightarrow{f}(A)$$

وبالتالي يوجد $a \in A$ بحيث $f(x) = f(a)$

$$f(x-a) = 0 \Rightarrow x-a \in \ker f$$

وبالتالي يوجد $c \in \ker f$ بحيث $x - a = c \Rightarrow x = \underset{A}{a} + \underset{\ker f}{c}$

$$\Rightarrow \overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(A)) \subseteq A + \ker f$$

من جهة أخرى: أياً كان $z \in A + \ker f$ فإن

$$z = a + c \;;\; a \in A \text{ and } c \in \ker f$$

$$f(z) = f(a+c) = f(a) + \underset{0}{f(c)} = f(a) \;;\; a \in A$$

$$\Rightarrow f(z) \in \overrightarrow{f}(A) \Rightarrow z \in \overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(A))$$

ومنه $A + \ker f \subseteq \overleftarrow{f}(\overrightarrow{f}(A))$

2 - نلاحظ أن $\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(B)) \subseteq B$ ومنه $\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(B)) \subseteq Im\ f$

$$\overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(B)) \subseteq B \cap Im\ f$$

من جهة أخرى إذا كان $y \in B \cap \mathrm{Im}\, f$ فإن

$y \in B$ and $y \in \mathrm{Im}\, f$

$y \in B$ and $y = f(x)\ ;\ x \in M$

$\Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow x \in \overleftarrow{f}(B)$

$f(x) \in \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(B)) \Rightarrow y \in \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(B))$.

$\Rightarrow B \cap \mathrm{Im}\, f \subseteq \overrightarrow{f}(\overleftarrow{f}(B))$ #