$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

f غامر

المحاضرة الخامسة:

مبرهنة:

إذا كان $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow C$ تشاكلات مودوليات وكان f غامراً

فإن القضيتين التاليتين متكافئتين:

1 - يوجد تشاكل مودولي وحيد $h : B \longrightarrow C$ يحقق « $h \circ f = g$ »

2 - $\ker f \subseteq \ker g$

الإثبات: ②⇐①

$\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0$

$g(x) = h(f(x)) = h(0) = 0 \Rightarrow x \in \ker g$

ومنه $\ker f \subseteq \ker g$

①⇐② :

أياً كانت $x, y \in A$ بحيث $f(x) = f(y)$ فإن

$f(x-y) = 0_B \Rightarrow x - y \in \ker f$

ولدينا $\ker f \subseteq \ker g$

كون g تشاكل مودولي

$\Rightarrow g(x-y) = 0_B \Rightarrow g(x) = g(y)$

ومنه وحسب المبرهنة الأولى في المحاضرة الرابعة: يوجد تطبيق $h : B \longrightarrow C$

بحيث $h \circ f = g$

لنبرهن الآن على أن h تشاكل مودولي:

$\forall\ b_1, b_2 \in B \quad \wedge \quad \forall\ \alpha, \beta \in R \ : \exists\ a_1, a_2 \in A \ ; \ f(a_1) = b_1$

$f(a_2) = b_2$

عندئذٍ:

$$\begin{aligned}
h(\alpha b_1 + \beta b_2) &= h(\alpha f(a_1) + \beta f(a_2)) \\
&= h(f(\alpha a_1 + \beta a_2)) && \longleftarrow \text{لأن } f \text{ تشاكل مودولي} \\
&= g(\alpha a_1 + \beta a_2) && \longleftarrow \text{لأن } h \circ f = g \\
&= \alpha g(a_1) + \beta g(a_2) && \longleftarrow \text{لأن } g \text{ تشاكل مودولي} \\
&= \alpha h(f(a_1)) + \beta h(f(a_2)) && \longleftarrow \text{لأن } h \circ f = g \\
&= \alpha h(b_1) + \beta h(b_2)
\end{aligned}$$

ومنه h تشاكل مودولي.

إثبات الوحدانية: لنفرض وجود تشاكل مودولي آخر حيث $k: B \longrightarrow C$

بحيث $k\circ f = g$ و $h\circ f = g$ أي $h\circ f = k\circ f$

وبما أن التشاكل f غامر فهو قابل للاختصار من اليمين وبالتالي $h = k$

أي أن التشاكل h تشاكل وحيد.

- لنفرض الآن:

لنفرض أن التشاكل h متباين ولنبرهن أن $\ker f = \ker g$

وبالعكس لنفرض أن $\ker f = \ker g$ ولنبرهن أن h متباين

« بمعنى آخر: h متباين $\Leftrightarrow \ker f = \ker g$ »

($\Leftarrow$)

لدينا $\ker f \subseteq \ker g$ كما أن $x \in \ker g$ فإن $g(x) = 0$

$\Rightarrow h(f(x)) = 0 \xRightarrow{h \text{ متباين}} f(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker f$

ومنه $\ker g \subseteq \ker f$ وعليه فإن $\ker f = \ker g$

($\Rightarrow$)

لنفرض أن $\ker g = \ker f$ ولنبرهن أن h متباين.

أياً كان $b \in \ker h$ فإن $\boxed{h(b) = 0}$ وبما أن f تشاكل غامر فإنه من أجل العنصر b يوجد $a \in A$ بحيث $b = f(a)$ وبالتالي يكون $h(f(a)) = h(b)$

$\Rightarrow h(f(a)) = 0 \Rightarrow g(a) = 0 \Rightarrow a \in \ker g = \ker f$

أي أن $f(a) = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$ وهذا يثبت لنا أن h متباين.

مبرهنة:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd}$$

f متباين

إذا كان $f: B \longrightarrow A$ و $g: C \longrightarrow A$ تشاكلان مودوليان وكان f متباين، فإن القضيتين التاليتين متكافئتين:

/I/ . يوجد تشاكل مودولي وحيد $h: C \longrightarrow B$ يحقق "$f\circ h = g$"

/II/ . $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$

الإثبات: /I/ $\Rightarrow$ /II/: بما أن h تطبيق فإنه حسب مبرهنة سابقة « المبرهنة الثانية في المحاضرة الرابعة » يكون $\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$

.I ⇐ II : بما أن $Img \subseteq Imf$ فإنه يوجد تطبيق

$h : C \longrightarrow B$

هذا التطبيق يحقق $f \circ h = g$

لنبرهن الآن على أن h تشاكل مودولي:

$\forall x, y \in C \quad \wedge \quad \forall \alpha, \beta \in R$:

$f(h(\alpha x + \beta y)) = g(\alpha x + \beta y)$ ⟵ لأن $f \circ h = g$

$= \alpha . g(x) + \beta g(y)$ ⟵ لأن g تشاكل مودولي

$= \alpha . f(h(x)) + \beta f(h(y))$ ⟵ لأن $f \circ h = g$

$= f(\alpha h(x) + \beta h(y))$ ⟵ لأن f تشاكل مودولي

إذاً حصلنا على المساواة $f(h(\alpha x + \beta y)) = f(\alpha h(x) + \beta h(y))$

وبما أن f متباين فإن $h(\alpha x + \beta y) = \alpha h(x) + \beta h(y)$

وهذا يبين لنا أن h هو تشاكل مودولي

لنبرهن أن h وحيد: لنفرض وجود تشاكل آخر $k : C \longrightarrow B$ يحقق

$f \circ k = g \Rightarrow f \circ k = f \circ h$

$k = h$ ، كون f متباين فإنه قابل للاختزال من اليسار اي

لنبرهن أن $Img = Imf \iff h$ غامر

$(\Rightarrow)$ أياً كان $f(b) \in Imf$ بحيث $b \in B$ فإنه من أجل العنصر b يوجد $c \in C$ بحيث $b = h(c)$ ((لأن h غامر)) وبالتالي

$f(b) = f(h(c))$

$= g(c) \in Img \Rightarrow Imf \subseteq Img$

ولدينا $Img \subseteq Imf$ فإننا نجد أن $Imf = Img$ #

$(\Leftarrow)$

لنفرض $Img = Imf$ ولنبرهن أن h تشاكل غامر اي لنبرهن أن

$\forall c \in C : \exists b \in B ; \; h(c) = b$

بما أن $Imf = Img$ فإنه من أجل اي عنصر $b \in B$ يوجد $c \in C$ بحيث

وبالتالي $f(b)=g(c)$ لان $f(b)=f(\bar{h}(c))$ $g(c)=f(\bar{h}(c))$

وبما ان f تشاكل متباين فإن $b=f(c)$ وهذا يثبت ان $\bar{h}$ غامر.

انتهت المحاضرة...