(المحاضرة التاسعة)

الفصل الثاني: المتتاليات والمتسلسلات العقدية

تعريف المتتالية العقدية:

هي كل تابع منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية N أو مجموعة جزئية منها $A \subset N$ ومستقره مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$.

حيث $N = \{0,1,2,\dots\}$.

$$z : A \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$n \longmapsto z(n) = z_n$$

- ندعو z_n بالحد العام أو الحد النوني للمتتالية العقدية
- كما نرمز للمتتالية بالرمز $\{z_n\}_{n\in A}$
- ونكتب اختصاراً $\{z_n\}$ عندما $N = A$
- إذا كانت A منتهية نقول أن المتتالية منتهية وإذا كانت A غير منتهية فنقول عن المتتالية أنها غير منتهية.
- مثال على كل مجموعة منتهية هي متتالية $\{2, 7i, -3, -5+i\}$

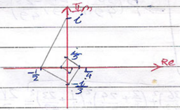
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \longrightarrow$ الارتباط مع A

- مثال: نفرض $\{\frac{i^n}{n}\}_{n\in N^*}$ متتالية عقدية

$$\left\{\frac{i^n}{n}\right\}_{n\in N^*} = \left\{\frac{i}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{i}{3}, \frac{1}{4}, \frac{i}{5}, -\frac{1}{6}, -\frac{i}{7}, \dots\right\}$$

حيث يكون التمثيل الهندسي للمتتالية كما يلي:



⊛ نعرف قيم المتتالية $\{z_n\}_{n\in A}$ بالمجموعة $\{z_n ; n\in A\}$ بحيث لا نسمح بتكرار العنصر z_n.

مثال $\{i^{n^2}\} = \{1, i, -1, -i, 1, i, -1, \dots\}$

فتكون مجموعة قيم هذه المتتالية $\{1, i, -1, -i\}$

نلاحظ أنه إذا كانت المتتالية منتهية فإن مجموعة قيم المتتالية تكون منتهية إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة

* متتاليتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية لمتتالية عقدية :

نفرض $\{z_n\}_{n\in A}$ متتالية عقدية عندئذ :

$$\forall n \in A : z_n \in \mathbb{C} \Longrightarrow z_n = x_n + i\, y_n$$

حيث $x_n = Re(z_n) \in \mathbb{R}$, $y_n = Im(z_n) \in \mathbb{R}$

تسمى $\{x_n\}_{n\in A}$ متتالية الأجزاء الحقيقية لـ $\{z_n\}_{n\in A}$

و $\{y_n\}_{n\in A}$ متتالية الأجزاء التخيلية لـ $\{z_n\}_{n\in A}$

حيث $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليتان حقيقيتان .

مثال لتكن المتتالية $\{n + \frac{i}{n+1}\} = \{i, 1+\frac{i}{2}, 2+\frac{i}{3}, 3+\frac{i}{4}, \dots\}$

$\{n\}$ متتالية الأجزاء الحقيقية

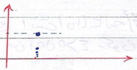
$\{\frac{1}{n+1}\}$ متتالية الأجزاء التخيلية

من التمثيل الهندسي للمتتالية العقدية ينتج تتابع نقط وهي متباعدة

مثال لتكن المتتالية $\{1 + \frac{i}{n+1}\}$

متتالية الأجزاء الحقيقية

متتالية ثابتة



مثال لتكن المتتالية $\{(1+i)^n\} = \{1, 1+i, 2i, -2+2i, -4, -4-i, \dots\}$

$\{x_n\} = \{1, 1, 0, -2, -4, -4, \dots\}$

$\{y_n\} = \{0, 1, 2, 2, 0, -4, \dots\}$

⊛ تقارب متتالية عقدية :

نفرض $\{z_n\}$ متتالية عقدية و $a \in \mathbb{C}$ عدد عقدي

عندئذ نقول عن المتتالية $\{z_n\}$ أنها متقاربة من a إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall \varepsilon>0 ; \exists n(\varepsilon)>0 ; \forall n>n(\varepsilon) \Rightarrow |z_n-a|<\varepsilon$$

بمعنى آخر نقول عن a أنها نهاية للمتتالية العقدية $\{z_n\}$ باستثناء عدد منته منها

ندعو العدد العقدي a بنهاية المتتالية $\{z_n\}$ ونكتب

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad \text{أو} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

وإذا لم يوجد عدد مثل a يحقق الشرط السابق عندئذ نقول أن المتتالية z_n متباعدة ويكون ذلك في الحالتين التاليتين:

• الحالة الأولى: $|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

أي لا يوجد عدد a يحقق الشرط السابق فنكتب $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

• الحالة الثانية: عدم وجود نهاية

مثال (I) $\{(1+i)^n\}$ متباعدة لأن $|(1+i)^n| = |(1+i)|^n = (\sqrt{2})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

(II) $\{i^n\}$ متباعدة وذلك لعدم وجود عدد عقدي يحقق الشرط السابق

أي أنه لو أخذنا $a \in \{1, i, -1, -i\}$ عندئذ القرص المفتوح $D(a, \frac{1}{2})$ يحوي كل الحدود المطابقة لـ a وخارجه الحدود غير المنتهية من حدود المتتالية.

تمرين: أثبت أن المتتالية $\{\frac{1}{n+1} + i\frac{n-1}{n+1}\}$ متقاربة من i اعتماداً على التعريف.

من أجل $\varepsilon>0$ يكون

$$|z_n-a| = \left|\frac{1}{n+1} + i\frac{n-1}{n+1} - i\right|$$

$$= \left|\frac{1}{n+1} - \frac{2i}{n+1}\right| = \frac{\sqrt{5}}{n+1}$$

اختيار ε: $\frac{\sqrt{5}}{n+1} < \varepsilon$ ، $\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 1 < n$

نختار $n_\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} - 1$

فيكون من أجل $n > n_\varepsilon$

$$|z_n-a| = \frac{\sqrt{5}}{n+1} < \frac{\sqrt{5}}{n_\varepsilon+1} = \frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}-1+1} = \varepsilon$$

وهو المطلوب #

Subject ______ التـــاريخ :

Date ______ الموضـــوع :

⊛ المتتالية العقدية المحدودة :

نقول عن المتتالية $\{z_n\}$ أنها محدودة إذا حقق الشرط التالي :

$$\exists R<+\infty : \forall n\in\mathbb{N} : |z_n|<R$$

بمعنى آخر :

نقول عن المتتالية $\{z_n\}$ أنها محدودة إذا وجد قرص مفتوح من الشكل $D(0,R)$ يحوي جميع حدود المتتالية

مثال : $\left\{\frac{i^n}{n+1}\right\}$ متتالية محدودة لأن :

$$\forall n\in\mathbb{N} : |z_n| = \left|\frac{i^n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < 2$$

⊛ مبرهنة : دون إثبات

كل متتالية عقدية متقاربة تكون محدودة .

إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة .

مثال : $\{i^n\}$ محدودة لكنها متباعدة

انتهت المحاضرة التاسعة