المحاضرة الخامسة   الأحد   12/10/2014

الفصل الثالث: الحركة الدورانية لجسم صلب حول محور ثابت

تعريف: هي حركة جسم صلب ثبتت فيه نقطتان أثناء الحركة، ندعو المستقيم الواصل بين النقطتين الثابتتين بمحور الدوران.

بما أن عدد درجات الحرية للجسم الصلب المقيد بنقطتين تساوي درجة واحدة وبالتالي فإن للجسم الصلب في الحركة الدورانية حول محور درجة حرية واحدة وبالتالي يوجد وسيط واحد للحركة نختاره عبارة عن زاوية θ بين المستويين.

المستوي الأول: مستو ثابت يحوي محور الدوران.

المستوي الثاني: مستو متماسك مع الجسم يحوي محور الدوران أيضاً.

وبالتالي تتعين حركة الجسم بمعادلة حركة واحدة $\theta = \theta(t)$ وهي معادلة الحركة الوحيدة.

ملاحظة: عندما يدور الجسم حول محور الدوران فإن كل نقطة منه ترسم دائرة مركزها يقع على محور الدوران ونصف قطرها هو بعد النقطة عن محور الدوران ومستوي هذه الدائرة يعامد محور الدوران.

وبالتالي مسارات نقاط هذا الجسم عبارة عن دوائر متوازية تعامد محور الدوران، فإذا دارت أي نقطة بزاوية θ فإن جميع النقاط سوف تدور بنفس الزاوية.

السرعة الزاوية: هي مشتق الزاوية بالنسبة للزمن أي:

$$\omega = \theta' = \frac{d\theta}{dt}$$

شعاع الدوران:

هو شعاع $\vec{\omega}$ محمول على محور الدوران طويلته تساوي قيمة السرعة الزاوية وجهته بحيث يكون الدوران مباشر «وجهة الدوران عكس عقارب الساعة» وهو نفسه لجميع نقاط الجسم

$$\vec{\omega} = \omega . \vec{u}$$ ، $\vec{u}$ شعاع واحدة محور الدوران

** ليس من الضروري أن تكون قيمة شعاع الدوران ثابتة في كل لحظة ولكن جهته ثابتة دوماً **

شعاع التسارع الزاوي:

هو مشتق شعاع الدوران بالنسبة للزمن أي:

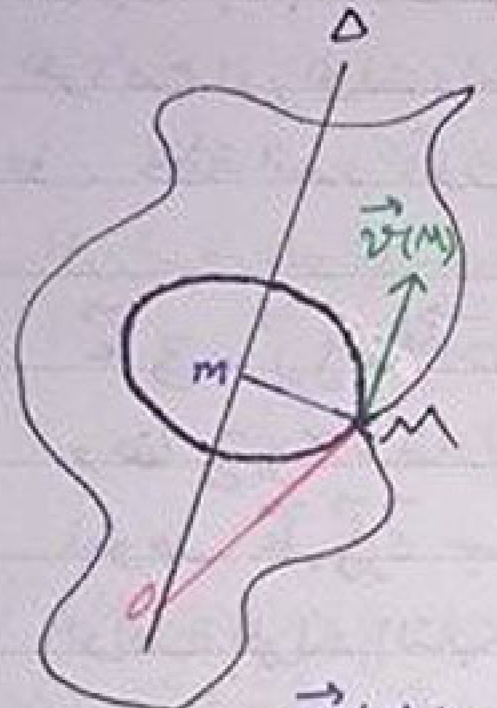
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \theta'' . \vec{u}$$

وهو أيضاً محمول على محور الدوران .

ملاحظات :

* ثابت $= |\vec{\omega}|$ «طويلة شعاع الدوران ثابتة» فإن الحركة دورانية منتظمة $\Leftrightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{0}$
* $\vec{\varepsilon} , \vec{\omega}$ بجهة واحدة فإن الحركة دورانية متسارعة .
* $\vec{\varepsilon} , \vec{\omega}$ بجهتين مختلفتين فإن الحركة دورانية متباطئة

الدراسة الشعاعية :



توزع السرع :

لنرسم مسار احدى النقاط ولتكن M ولتكن m المسقط القائم لـ M على محور الدوران Δ عندئذٍ نلاحظ :

$\vec{\omega} \perp \vec{v}(M)$ وأيضاً $\vec{v}(M) \perp \vec{mM}$

وبالتالي :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{mM}$$

بفرض O نقطة ما من محور الدوران Δ فإن :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge (\vec{mO} + \vec{OM}) = \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{mO}}_{} + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

$\vec{0}$ لأن $\vec{mO}$ توازي $\vec{\omega}$

وبالتالي : $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$

شعاع التسارع :

باشتقاق علاقة السرعة بالنسبة للزمن t اشتقاقه جداء نجد :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{mM})$$

حسب علاقة جيبس نجد :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{mM})}_{} \vec{\omega} - \omega^2 \cdot \vec{mM} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} - \omega^2 \cdot \vec{mM}$$

0 لأن $\vec{\omega} \perp \vec{mM}$

علاقة جيبس هي : $a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c) \cdot b - (a \cdot b) \cdot c$

نسمي $\vec{\Gamma}_T(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM}$ التسارع المماسي و $\vec{\Gamma}_N(M) = -\omega^2 \cdot \vec{mM}$ بالتسارع الناظمي

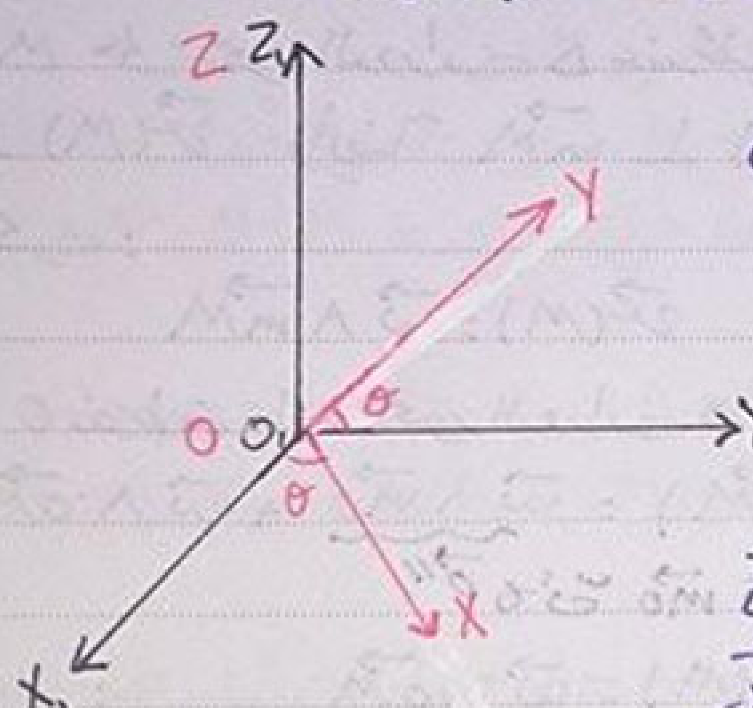
وبالتالي $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}_T(M) + \vec{\Gamma}_N(M)$

ملاحظة: في حال كانت الحركة دورانية منتظمة فإن: $\vec{\omega} = \vec{c}^{te}$ وبالتالي
$\vec{a}(M) = \vec{\Gamma}_N$ ومنه التسارع هنا يكون ناظمي جهته نحو مركز الدوران «تسارع جاذب مركزي».

الدراسة التحليلية:

نختار جملة محاور ثابتة $O_1X_1Y_1Z_1$ بحيث يكون محور الدوران هو أحد محاور الجملة وليكن O_1Z_1 ونختار جملة متماسكة مع الجسم وهي $OXYZ$ بحيث يكون محور الدوران هو أحد محاور الجملة وليكن OZ «أي O هي O_1 و OZ ينطبق على OZ_1»

لحظة البدء تكون الجملتين منطبقتين على بعضهما



الدراسة التحليلية لشعاع الموضع:

$$\vec{O_1M} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

وهنا x, y, z مقادير ثابتة،

لنوجد $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ بدلالة أشعة الواحدة للجملة الثابتة $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$

وذلك بالإسقاط:

$$\vec{i} = \cos\theta\, \vec{i}_1 + \sin\theta\, \vec{j}_1$$

$$\vec{j} = -\sin\theta\, \vec{i}_1 + \cos\theta\, \vec{j}_1$$

$$\vec{k} = \vec{k}_1$$

وبالتعويض نجد:

$$\vec{O_1M} = x(\cos\theta\, \vec{i}_1 + \sin\theta\, \vec{j}_1) + y(-\sin\theta\, \vec{i}_1 + \cos\theta\, \vec{j}_1) + z\vec{k}_1$$

$$\vec{O_1M} = (x\cos\theta - y\sin\theta)\vec{i}_1 + (x\sin\theta + y\cos\theta)\vec{j}_1 + z\vec{k}_1$$

وبالتالي مركبات الشعاع $\vec{O_1M}$ (شعاع الموضع) في الجملة الثابتة $O_1X_1Y_1Z_1$ هي:

$$x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta \quad , \quad y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta \quad , \quad z_1 = z$$

الدراسة التحليلية للسرعة:

لتكن M نقطة ما من الجسم الصلب عندئذ:

* عبارة السرعة في الجملة المتماسكة $OXYZ$ هي $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ وبالتالي:

$$\vec{v}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\, \vec{i} + x\omega\, \vec{j}$$

* عبارة السرعة في الجملة الثابتة $O_1X_1Y_1Z_1$ هي: $\vec{v}(M)=\vec{\omega}\wedge\vec{O_1M}$ وبالتالي:

$$\vec{v}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1}\\ 0 & 0 & \omega\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}=-y_1\omega\,\vec{i_1}+x_1\omega\,\vec{j_1}$$

الدراسة التحليلية للتسارع:

لتكن M نقطة ما من الجسم الصلب عندئذ:

* عبارة التسارع في الجملة المتماسكة $OXYZ$ هي $\vec{\Gamma}(M)=\vec{\varepsilon}\wedge\vec{OM}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$

وبالتالي:

$$\vec{\Gamma}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \varepsilon\\ x & y & z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ -y\omega & x\omega & 0\end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M)=(-y\varepsilon-x\omega^2)\,\vec{i}+(x\varepsilon-y\omega^2)\,\vec{j}$$

* عبارة التسارع في الجملة الثابتة $O_1X_1Y_1Z_1$ هي: $\vec{\Gamma}(M)=\vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_1M}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)$

وبالتالي:

$$\vec{\Gamma}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1}\\ 0 & 0 & \varepsilon\\ x_1 & y_1 & z_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1}\\ 0 & 0 & \omega\\ -y_1\omega & x_1\omega & 0\end{vmatrix}$$

$$\vec{\Gamma}(M)=(-y_1\varepsilon-x_1\omega^2)\,\vec{i_1}+(x_1\varepsilon-y_1\omega^2)\,\vec{j_1}$$

الحركة المماسة لحركة دورانية حول محور ثابت:

إذا انعدمت سرعة نقاط مستقيم متماسك مع الجسم الصلب في لحظة واحدة فقط نقول إن حركة الجسم في هذه اللحظة هي حركة مماسية لحركة دورانية حول محور ثابت.

انتهت المحاضرة