المحاضرة العاشرة

مبرهنة: نفرض $\{z_n\}$ متتالية عقدية و $a\in\mathbb{C}$ عندئذ تكون $\{z_n\}$ متقاربة من a إذا وفقط إذا كانت متتاليتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية متقاربتان من الجزء الحقيقي والتخيلي a.

بمعنى آخر: نفرض $z_n = x_n + iy_n$ و $a = \alpha + i\beta$ عندئذ

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \iff x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \wedge y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$$

الإثبات:

$\Longrightarrow$ بما أن $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ فإن

$$\forall \varepsilon>0 ;\ \exists n(\varepsilon)>0 ; \forall n>n_\varepsilon : |z_n - a| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x_n-\alpha| = |Re(z_n - a)| \leq |z_n - a| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |y_n - \beta| = |Im(z_n - a)| \leq |z_n - a| < \varepsilon$$

$\Longleftarrow$ بما أن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ عندئذ:

$$\forall \varepsilon>0 ,\ \exists n_1(\varepsilon)>0 ; \forall n>n(\varepsilon) : |x_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبما أن $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \beta$ عندئذ:

$$\forall \varepsilon>0 ; \exists n_2(\varepsilon)>0 : \forall n>n_2(\varepsilon) : |y_n-\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه

$$\forall \varepsilon>0 : \exists n(\varepsilon) = \max(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)) > 0$$

$$\forall n > n(\varepsilon) : |z_n - a| = |(x_n-\alpha) + i(y_n - \beta)|$$

$$\leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

تمرين: ادرس تقارب وتباعد المتتاليات التالية:

1] $\{z_n\} = \{n^2 + i\frac{n-1}{n+1}\}$

$n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ نلاحظ أن $\{x_n\} = \{n^2\}$ متباعدة لأن

ومنه المتتالية $\{z_n\}$ متباعدة.

2] $\{z_n\} = \{\frac{e^{in}}{n+1}\}$ $\qquad e^{i\theta} = cis\,\theta = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\{z_n\} = \{\frac{\cos n}{n+1} + i\frac{\sin n}{n+1}\} \Rightarrow \{x_n\} = \{\frac{\cos n}{n+1}\} , \{y_n\} = \{\frac{\sin n}{n+1}\}$$

$$x_n = \frac{\cos n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad , \quad y_n = \frac{\sin n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ومنه المتتالية $\{z_n\}$ متقاربة من الصفر.

3] $\{z_n\} = \{\frac{n^7+2}{e^n} + i\frac{\ln n}{n}\}$

$x_n = \frac{n^7+2}{e^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ حسب أوبتال وبتطبيقها سبع مرات

$y_n = \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Leftarrow$ $\{z_n\}$ متقاربة من الصفر.

4] $\{z_n\} = \{n\ln(1+\frac{1}{n}) + i\frac{3n^2+1}{n^2+n+2}\}$

$x_n = \ln(1+\frac{1}{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln e = 1$

$y_n = \frac{3n^2+1}{n^2+n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$

ومنه $\{z_n\}$ متقاربة من $1+3i$

أو $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1+3i$

تذكرة

$|x+y| \leq |x|+|y|$

$||x|-|y|| \leq |x-y|$

مبرهنة: نفرض $\{z_n\}$ متتالية عقدية و $a \in \mathbb{C}$ عندئذ

$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Leftrightarrow |z_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

الإثبات:

$\Rightarrow$ بما أن $\{z_n\}$ متقاربة من a فإن:

$\forall \varepsilon>0 : \exists n_\varepsilon>0 ; \forall n_\varepsilon<n : |z_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow ||z_n - a| - 0| < \varepsilon$

$\Leftarrow$ بما أن $|z_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ فإن

$\forall \varepsilon>0 : \exists n_\varepsilon>0 ; \forall n>n_\varepsilon : ||z_n - a| - 0| < \varepsilon$

$\Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$

(*) حالة خاصة: من أجل $a=0$ يكون

$|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

تمرين: ادرس المتتالية $\mathfrak{z}_n=\left\{\frac{1+i}{n+1}\right\}$

نلاحظ أنه

$$\left|\frac{1+i}{1+n}\right|=\frac{|1+i|}{|1+n|}=\frac{\sqrt{2}}{1+n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

ومنه $\{\mathfrak{z}_n\}$ متقاربة من الصفر.

مبرهنة: نفرض أن $\{\mathfrak{z}_n\}$ متتالية عقدية و $a\in\mathbb{C}$، عندئذ:

$$\mathfrak{z}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a \Longrightarrow |\mathfrak{z}_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}|a|$$

الإثبات:

بما أن $\mathfrak{z}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ فإن

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon>0,\ \forall n>n_\varepsilon:\ |\mathfrak{z}_n-a|<\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \big||\mathfrak{z}_n|-|a|\big|\leq|\mathfrak{z}_n-a|<\varepsilon$$

ملاحظة: إن عكس المبرهنة السابقة غير صحيح بالضرورة.

مثال على ذلك: $\{i^n\}$ نرى تحقق أن $|i^n|=|i|^n=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

إلا أن $\{i^n\}$ متباعدة.

• مبرهنة: نهاية متتالية عقدية إن وجدت فهي وحيدة.

الإثبات: نفرض $\{\mathfrak{z}_n\}$ متتالية عقدية متقاربة من العددين العقديين a,b عندئذ:

$$\forall n\in\mathbb{N};\ |a-b|\leq|\mathfrak{z}_n-a|+|\mathfrak{z}_n-b|\xrightarrow[n\to\infty]{}0+0=0$$

ولدينا $0\leq|a-b|$

فإن $|a-b|=0 \Longrightarrow a=b$

مبرهنة: • بدون إثبات:

إذا كانت $\{\mathfrak{z}_n\}$ متتالية عقدية متقاربة و $\{\omega_n\}$ متتالية جزئية

وكانت $\omega_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ عندئذ $\mathfrak{z}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$

Subject ______ التـــاريخ :

Date ______ الموضـــوع :

ملاحظة: في هذه المرحلة يجب أن تكون $\{z_n\}$ متقاربة فلو أخذنا المتتالية $\{z_n\} = \{i^n\}$ و المتتالية الجزئية $\{w_n\} = \{1\}$ نجد أن $\{w_n\}$ متقاربة إلا أن $\{z_n\}$ متباعدة.

مبرهنة: بدون إثبات
نفرض $\{w_n\}, \{z_n\}$ متتاليتين عقديتين متقاربتين عندئذ:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n$$

مبرهنة: تكون المتتالية العقدية محدودة إذا وفقط إذا كانت متتاليتا الأجزاء الحقيقية والتخيلية محدودتين:

بمعنى آخر: $\{z_n = x_n + i y_n\}$ محدودة $\iff$ $x_n \wedge y_n$ محدودتان

الإثبات:

$\Leftarrow$ نفرض $\{z_n\}$ متتالية محدودة عندئذ:

$$\exists R < +\infty \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} : |z_n| < R$$
$$\Rightarrow x_n = |Re(z_n)| \leq |z_n| < R$$
$$y_n = |Im\, z_n| \leq |z_n| < R$$

$\Rightarrow$ نفرض $\{x_n\}, \{y_n\}$ محدودتان عندئذ

$$\exists R_1 < +\infty \ , \ \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| < R_1$$
$$\exists R_2 < +\infty \ , \ \forall n \in \mathbb{N} : |y_n| < R_1$$

نضع $R = R_1 + R_2$ فيكون،

$$|z_n| = |x_n + i y_n| \leq |x_n| + |y_n| < R_1 + R_2 = R$$

انتهت المحاضرة العاشرة

وظيفة: ادرس تقارب وتباعد المتتاليات التالية:

1] $\{z_n\} = \{i \cos\frac{n\pi}{2}\}$

$\{y_n\} = \{\cos\frac{n\pi}{2}\} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$

$\Leftarrow$ $\{z_n\}$ متباعدة لأنه لا يوجد نهاية وحيدة.

2] $\{z_n\} = \left\{ \frac{1 + (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})\,i}{\sqrt{n+1}} \right\}$

$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow$ متتالية الأجزاء الحقيقية متقاربة لأنها ثابتة

$$y_n = \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n+3}{n+1}} - \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$$

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n+3}{n+1}} - \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

$\Leftarrow$ المتتالية $\{z_n\}$ متقاربة من العدد 0 أي: $\left(\{z_n\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \right)$

3) $\{z_n\} = \left\{ \frac{(n+3)^5 - (n+2)^5}{(n+1)^4}\, i \right\}$

$$(\alpha+\beta)^n = \alpha^n + \frac{n}{1!}\alpha^{n-1}\beta + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^{n-2}\beta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\alpha^{n-3}\beta^3$$ نتذكر الدستور

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\alpha^{n-4}\beta^4 + \cdots + \beta^n$$

$$= \alpha^n + C_1^n \alpha^{n-1}\beta + C_2^n \alpha^{n-2}\beta^2 + \cdots + \beta^n$$

الكل بتطبيق الدستور نجد

$$\{y_n\} = \frac{\cancel{n^5} + 15n^4 + 90n^3 + 270n^2 + 405n + 243 - \cancel{n^5} - 10n^4 - 40n^3 - 80n^2 - 80n - 32}{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}$$

$$= \frac{5n^4 + 50n^3 + 190n^2 + 325n + 211}{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}$$

$$\{y_n\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 5$$

$\Leftarrow$ $\{z_n\}$ متقاربة من $5i$

Subject ______ التاريخ :

Date ______ الموضوع :

5) $\{z_n\} = \{(1 - \frac{1}{10} i)^n\}$

$|z_n| = |1 - \frac{1}{10}|^n = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{100}}\right)^n = \left(\sqrt{\frac{101}{100}}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ متباعدة

6) $\{z_n\} = \{i \cos \frac{n\pi}{2}\}$

$\Rightarrow \{y_n\} = \{\cos \frac{n\pi}{2}\} = \{1, 0, -1, 0, 1, \ldots\}$

$\Leftarrow$ متباعدة لعدم وجود نهاية وحيدة

Subject   التاريخ :

Date   الموضوع :

6] $\{\delta_n\} = \{(-1)^{n+1} \cos n\pi\}$

$\{x_n\} = \{(-1)^{n+1} \cos n\pi\} = \{-1, -1, -1, -1, \ldots\}$

متقاربة لأنها متتالية ثابتة

$\Rightarrow \{\delta_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

طريقة ثانية :

$x_n = (-1)^{n+1} \cos n\pi$

ونعلم أن $\cos n\pi = (-1)^n$

$\Rightarrow x_n = (-1)^{n+1}(-1)^n$

$= (-1)^{n+1+n} = (-1)^{2n+1}$

إن القوة $(2n+1)$ هي عدد فردي دوماً ومنه

$\{x_n\} = \{(-1)^{2n+1}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

$\Leftarrow$ x_n متقاربة من -1

انتهت وظيفة المحاضرة العاشرة

4] $\{\delta_n\} = \left\{\dfrac{(1+n)^n + i}{n^{2n}}\right\}$

$x_n = \dfrac{(1+n)^n}{n^{2n}} = \dfrac{(1+n)^n}{n^n} \cdot \dfrac{1}{n^n} = \left(\dfrac{1+n}{n}\right)^n \cdot \dfrac{1}{n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \dfrac{1}{n^n}$

وبما أن $\frac{1}{n}$ متتالية متقاربة و $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ متتالية متقاربة

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^n}$

$= e \cdot 0 = 0$

$\{y_n\} = \left\{\dfrac{i}{n^{2n}}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\xRightarrow{\text{متقاربة}} \{\delta\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ملاحظة: إن جميع حلول الوظائف اجتهاد شخصي وليس للدكتور أي علاقة بالحل.