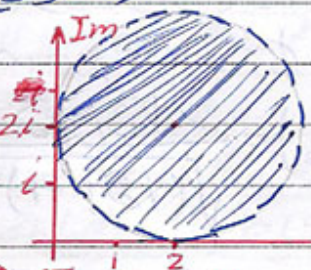
Subject التاريخ: Date 2014/11/19 الموضوع: أطراف Exact

تمرين امتحاني: مثل كلاً من المجموعات التالية هندسياً في المستوي العقدي (مستوي غاوس) ثم ادرسها توبولوجياً.

1) $A_1=\{z\in\mathbb{C}: |3-2-2i|<2\}$

المجموعة A_1 هي القرص المفتوح $D(2+2i,2)$ وهي مجموعة مفتوحة وليست مغلقة ومحدودة وغير محدبة ومترابطة ومنطقة وحيدة الترابط.

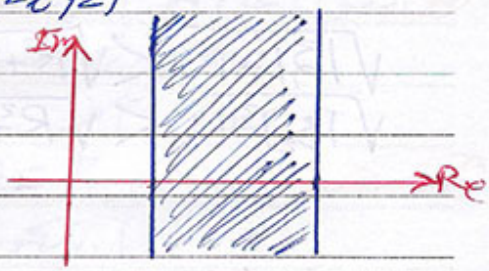


سؤالو أوجد A_1° ، $\bar{A}_1$ ، $Fr(A)$

$A_1^\circ=A_1$ ، $\bar{A}_1=\bar{D}(2+2i,2)$ ، $Fr(A_1)=C(2+2i,2)$

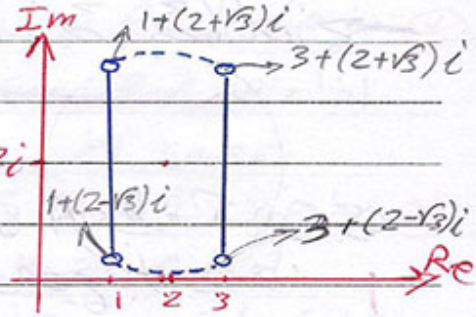
2) $A_2=\{z\in\mathbb{C}: 1\le Re(z)\le 3\}$

المجموعة A_2 غير مفتوحة ومغلقة وغير محدودة ومحدبة ومترابطة وليست منطقة.



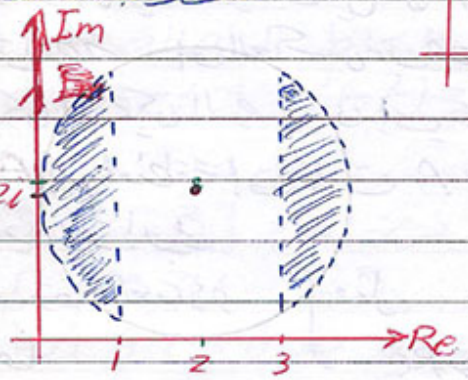
$A_1\cap A_2$

مجموعة غير مفتوحة وغير مغلقة ومحدودة ومحدبة ومترابطة لكنها ليست منطقة:



A_1-A_2

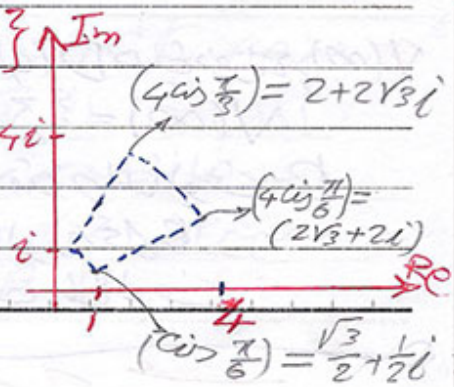
مفتوحة وغير مغلقة ومحدودة وغير مترابطة لأنه أمكن فصل المجموعة إلى مجموعتين منفصلتين تماماً اجتماعهما الكل



3) $A_3=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<4\ ,\ \frac{\pi}{6}<Arg(z)<\frac{\pi}{3}\}$

مفتوحة وغير مغلقة ومحدودة ومترابطة ومنطقة وحيدة الترابط وليست محدبة

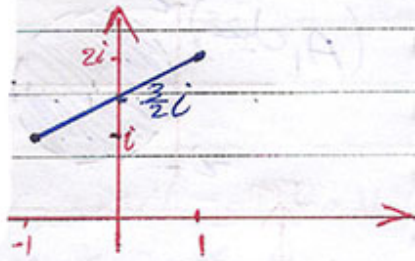
سؤال: هل النقطة $z_0=1+i$ داخلية؟ نلاحظ أن $D(z_0,\frac{1}{10})\subset A_3$ و A_3 مجموعة مفتوحة ومنه z_0 داخلية



ملاحظة: لتبيان العلاقة الآتية في الامتحان يجب تحديد احداثيات
كل نقطة تتأطر من المجموعة المدروسة مع المحاور الاحداثية
ويجب تبيان سبب صفة المجموعة إن كانت مفتوحة أم لا
ومغلقة أم لا و إذا كانت محدودة يحدد القرص الذي يحيطها وسبب تحديدها
و* سبب ترابطها أم لا و ماذا هي منطقة أو منطقة وحيدة الترابط.

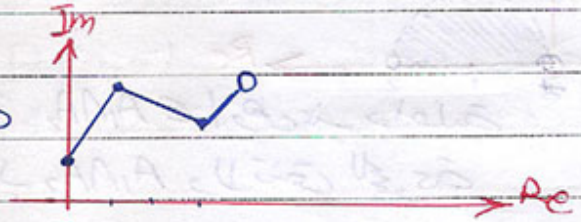
4) $A_4 = [-1+i, 1+2i]$

ليست مجموعة مفتوحة لعدم وجود أي قرص مفتوح فيها
وهي مغلقة ومحدودة بالقرص $D(0,10)$
ومحدبة لأنه يمكن الوصل بين أي نقطتين بخط مستقيم
ومترابطة لأنها محدبة وليست منطقة لأنها ليست مفتوحة.



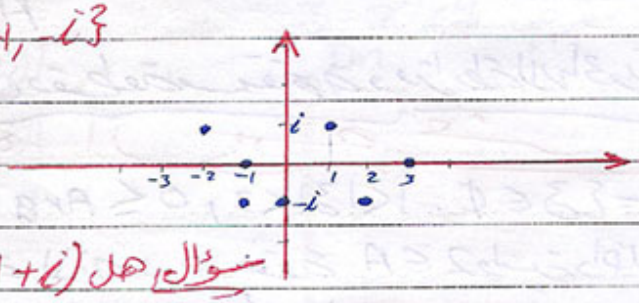
5) $A_5 = [i, 1+3i, 3+2i, 4+3i]$

هي غير مفتوحة وغير مغلقة ومحدودة وغير محدبة
ومترابطة وليست منطقة



6) $A_6 = \{-2+i, 3, 1+i, -1-i, 2-i, 1, -i\}$

هي مجموعة غير مفتوحة و مغلقة
ومحدودة وغير محدبة وغير مترابطة
وليست منطقة



سؤال: هل $(1+i)$ نقطة ملاصقة لـ A_6 وهل هو نقطة تراكم لـ A_6؟
هي نقطة ملاصقة ولكنها ليست نقطة تراكم

ملاحظة:
* أي مجال في $\mathbb{C}$ لا يمكن أن يكون مجموعة مفتوحة.
* كل مجموعة منتهية وغير خالية هي غير مفتوحة ومغلقة في الفضاء المتري العقدي المألوف.

وظيفة: سؤال دورة 2013/2014 نعرف $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3, 0 \leq Arg(z) \leq \frac{\pi}{4}\}$
1) مثل A هندسياً في المستوى العقدي.
2) هل A (مفتوحة، مغلقة، محدودة، مترابطة) في الفضاء المتري العقدي المألوف.
3) هل $a = 2+i$ نقطة داخلية بالنسبة لـ A.

Subject التاريخ :

Date الموضوع :

سؤال دورة 2013-2014 :

$A_1=\{z\in\mathbb{C}: 2Re(\frac{1}{z})>1\}$

$A_2=\{z\in\mathbb{C}: 0\le Arg\le \frac{\pi}{2}\}$

① مثل كلا من A_1 و A_2 و $A_1\cap A_2$

② هل $A_1\cap A_2$ مجموعة (مفتوحة - مغلقة - محدودة - مترابطة) ولماذا؟

نفرض $z=x+iy$ ⇐ $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow Re(\frac{1}{z})=\frac{x}{x^2+y^2}$

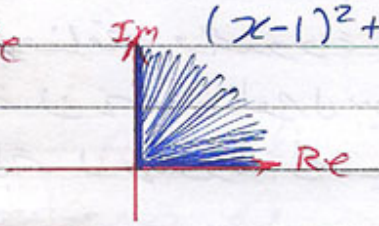
$\Rightarrow \frac{2x}{x^2+y^2}>1 \Rightarrow 2x>x^2+y^2 \Rightarrow x^2-2x+y^2<0$

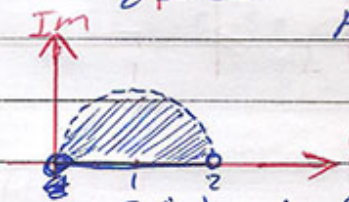
$x^2-2x+1+y^2-1<0$

$(x-1)^2+y^2-1<0$

$(x-1)^2+y^2<1 \Rightarrow D(1,1)$

(A_1 تمثيل)





A_2 تمثيل

تمثيل $A_1\cap A_2$

ان $A_1\cap A_2$ هي مجموعة غير مفتوحة لأن النقطة $1\in A_1\cap A_2$ وهي غير داخلية

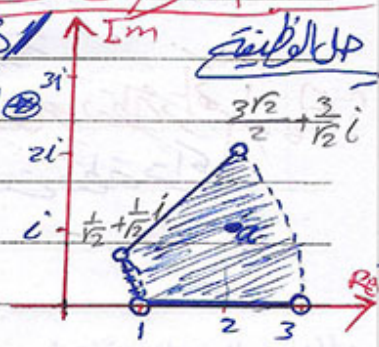
وغير مغلقة لأن النقطة $(1+i)$ ملاصقة لـ $A_1\cap A_2$ ولا تنتمي للمجموعة

محدودة لأن $A_1\cap A_2\subset D(0,10)$

مترابطة لأنه يمكن الوصل بين أي نقطتين بقطعة مستقيمة

انتهت الإجابة النموذجية

$A=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<3, 0\le Arg(z)\le\frac{\pi}{4}\}$ / الحل



هل الوظيفية

⊛ المجموعة A ليست مفتوحة لأنه يوجد نقطة $2\in A$ وليست داخلية

⊛ المجموعة A ليست مغلقة لأن النقطة $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ ملاصقة للمجموعة ولا تنتمي لها.

⊛ محدودة لأن $A\subset D(0,5)$

⊛ غير محدبة لأنه لا يمكن الوصل بين النقطة $(1,0000003)$ والنقطة $(i\times 1,000003)$ خط مستقيم

⊛ مترابطة لأنه يمكن الوصل بين أي نقطتين بخط منكسر

⊛ النقطة a هي نقطة داخلية لأنه $\exists D(2+i,\frac{1}{10})\subset A$

انتهاء حل الوظيفة