مراجعة في الفضاءات الشعاعية

* تعريف:

ليكن F حقلاً ما وليكن V مجموعة غير خالية مزودة بقانوني تشكيل،
• الأول (+) داخلي ندعوه الجمع • الثاني (.) خارجي ندعوه الضرب بعدد وهو مجموعة مؤثرات الحقل F.

نقول عن البنية $(V, +, .)$ فضاء شعاعي على F و نكتب $V(F)$ إذا حققت الشروط التالية:

/I/ البنية $(V, +)$ زمرة تبديلية.

/II/ إذا كان $u, v \in V$ و $\alpha, \beta \in F$ فإن:

1/ $1_F . v = v$

2/ $(\alpha + \beta). v = \alpha v + \beta v$

3/ $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

4/ $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta). v$

* ملاحظة: + داخلي : $V \times V \longrightarrow V$

$(u, v) \longmapsto u + v$

. خارجي : $F \times V \longrightarrow V$

$(\lambda, v) \longmapsto \lambda v$

* الاستقلال والارتباط الخطي:

* تعريف: لتكن $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة أشعة من الفضاء $V(F)$ نقول عن S إنها مستقلة خطياً إذا حققت الشرط التالي:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \; ; \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

و نقول عن المجموعة S إنها مرتبطة خطياً على F إذا وجدت $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$

ليست جميعها أصفاراً بحيث يكون $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$

* المجموع المباشر للفضاءات الشعاعية:

* تعريف: لتكن $\{W_i\}_{i=1,\ldots,n}$ أسرة منتهية من الفضاءات الجزئية من الفضاء $V(F)$

نقول عن $W = \sum_{i=1}^{n} W_i$ إنه مجموع مباشر إذا حقق:

$$\forall w \in W : \; w = \sum_{i=1}^{n} w_i \; ; \; w_i \in W_i \wedge i \in \{1, \ldots, n\}$$

ونكتب $W = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$ أو $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots W_n$

* مبرهنة مفيدة :

$\sum_{i=1} W_i$ مجموع مباشر $\Leftarrow W_i \cap \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}} W_j = \{0\}$

* الفضاء الجزئي المتمم لفضاء جزئي :

* تعريف :

U, W فضائين من فضاء شعاعي $V(F)$ ، نقول عن الفضاء W إنه متمم للفضاء U إذا كان $V = U \oplus W$

وعندئذٍ يكون U متمماً لـ W أي أن :

$$V \text{ في } U, W \text{ متتامان} \Leftrightarrow V = U \oplus W \Leftrightarrow \begin{cases} V = U + W \\ \wedge \\ U \cap W = \{0\} \end{cases}$$

* ملاحظات :

- كل فضاء شعاعي له متمم على فضاء ما ، بحيث هذا الفضاء يكون فضاء جزئياً فيه
- لكن F^n فضاء شعاعي على F فإن بعده يكون n

أي أن كل حقل معرف على نفسه بعده n فمثلاً :

$\mathbb{C}^n$ على $\mathbb{C}$ بعده n

ولذلك عكس القول أن $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n$ بحيث $\mathbb{R}^n$ معرف على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}^n$ معرف على $\mathbb{C}$

* تمهيد للدخول في نظرية المودولات :

- الفضاء الشعاعي معرف على حقل بينما المودول يختلف عن الفضاء الشعاعي بأنه معرف على حلقة ، مما يعني أن خواص المودول ستختلف عن خواص الفضاء الشعاعي

فمثلاً :

أي مجموعة من فضاء شعاعي مؤلف من عنصر واحد تكون مستقلة خطياً بينما في المودول يكون "ليس بالضرورة" أن تكون مستقلة .