مثال (١) : استخدم النواة المترددية في حل المعادلة التكاملية :

$$\Psi(x) = \cos x + \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x . \cos t + \sin 2x . \cos 2t + \sin 3x . \cos 3t) . \Psi(t)\, dt$$

مع العلم أن جميع الشروط محققة .

الحل :

$h(x) = \cos x$, $a_1(x) = \sin x$, $b_1(t) = \cos t$

$a_2(x) = \sin 2x$, $b_2(t) = \cos 2t$

$a_3(x) = \sin 3x$, $b_3(t) = \cos 3t$

$$* \ h_1 = \int_a^b b_1(t) . h(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos t . \cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$$

$$* \ h_2 = \int_a^b b_2(t) . h(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos 2t . \cos t\, dt = 0$$

$$* \ h_3 = \int_a^b b_3(t) . h(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos 3t . \cos t\, dt = 0$$

$$* \ a_{11} = \int_a^b a_1(t) . b_1(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin t . \cos t\, dt = 0$$

$$* \ a_{12} = \int_a^b a_1(t) . b_2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin t . \cos 2t\, dt = 0$$

$$* \ a_{13} = \int_0^{2\pi} a_1(t) . b_3(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin t . \cos 3t\, dt = 0$$

$$* \ a_{21} = \int_0^{2\pi} a_2(t) . b_1(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin 2t . \cos t\, dt = 0$$

$$* \ a_{22} = \int_0^{2\pi} a_2(t) . b_2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin 2t . \cos 2t\, dt = 0$$

$$* \ a_{23} = \int_0^{2\pi} a_2(t) . b_3(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin 2t . \cos 3t\, dt = 0$$

Subject .... / /

$$* \; a_{31} = \int_a^b a_3(t)\,b_1(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin 3t \cdot \cos t \; dt = 0$$

$$* \; a_{32} = \int_a^b a_3(t)\,b_2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin 3t \cdot \cos 2t \; dt = 0$$

$$* \; a_{33} = \int_a^b a_3(t)\,b_3(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin 3t \cdot \cos 3t \; dt = 0$$

ملاحظة : التكاملات السابقة تُحل باستخدام دساتير التحويل الآتية :

$$\sin mx \; \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$$

$$\sin mx \; \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right]$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]$$

- الآن نعوض في جملة المعادلات الجبرية الخطية :

$$(1-\lambda a_{11})c_1 - \lambda a_{12} c_2 - \cdots\cdots - \lambda a_{1n} c_n = h_1$$

$$-\lambda a_{21} c_1 + (1-\lambda a_{22}) c_2 - \cdots\cdots - \lambda a_{2n} c_n = h_2$$

$$\vdots$$

$$-\lambda a_{n1} c_1 - \lambda a_{n2} c_2 - \cdots\cdots + (1-\lambda a_{nn}) c_n = h_n$$

$$\left.\begin{aligned} (1-0)c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 &= \pi \\ 0 \cdot c_1 + (1-0)c_2 + 0 \cdot c_3 &= 0 \\ 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + (1-0)c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = \pi \quad , \quad c_2 = c_3 = 0$$

نعوض في صيغة الحل :

$$\Psi(x) = h(x) + \lambda \sum_1^n c_k a_k(x)$$

$$\Psi(x) = \cos x + \lambda c_1 a_1(x) + \lambda c_2 a_2(x) + \lambda c_3 a_3(x)$$

$$\Psi(x) = \cos x + \lambda \cdot \pi \cdot \sin x$$

وهو الحل المطلوب

Subject / /

مثال (2) : حل المعادلة التكاملية المتجانسة الآتية باستخدام النواة المترددة :

$$\Psi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} |x| \, \Psi(t) \, dt$$

الحل : أولاً لنتأكد أن $K(x,t)$ كمولة تربيعياً

$$* \int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dx \, dt = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |x|^2 \, dx \, dt = \frac{4}{3} < \infty$$

$$* \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dt = \int_{-1}^{1} x^2 \, dt = 2x^2 < \infty \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$* \int_a^b |K(x,t)|^2 \, dx = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{2}{3} < \infty \quad \forall t \in [-1,1]$$

$$a_1(x) = |x| \quad , \quad b_1(t) = 1$$

$$a_1(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

$$* a_{11} = \int_a^b a_1(t) \, b_1(t) \, dt = \int_{-1}^{1} |t| \, dt = \int_{-1}^{0} -t \, dt + \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$h_1 = \int_a^b h(t) \, b_1(t) \, dt = \int_{-1}^{1} 0 \, dt = 0$$

نعوض في جملة المعادلات الجبرية الخطية :

$$(1-\lambda) \, c_1 = h_1$$

$$\Rightarrow \quad c_1 - \lambda c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

نعوض في صيغة الحل :

$$\Psi(x) = h(x) + \lambda \sum_{1}^{n} c_K \, a_K(x)$$

$$\Rightarrow \quad \Psi(x) = 0$$

إذاً حل المعادلة هو الحل الصفري .

Subject .... / /

مثال (3) : باستخدام النواة المتردية حل المعادلة التكاملية :

$$\Psi(x) = \cot x + \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan t \cdot \Psi(t)\, dt$$

الحل :

$*\ h(x) = \cot x \qquad *\ k(x,t) = \tan t \qquad *\ a_1(x) = 1 \qquad *\ b_1(t) = \tan t$

$$*\ \int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2\, dx\, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\tan t|^2\, dx\, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\, dx\, dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\, [x]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\, dt = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} -1 + (1+\tan^2 t)\, dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-t + \tan t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi - \frac{\pi^2}{4} < \infty$$

$$*\ \int_a^b |k(x,t)|^2\, dx = \int \tan^2 t\, dx = \frac{\pi}{2}\tan^2 t < \infty \quad \forall\ t \in \left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right]$$

$$*\ \int_a^b |k(x,t)|^2\, dt = \int \tan^2 t\, dt = 2 - \frac{\pi}{2} < \infty$$

$$*\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \tan t \\ 0 & 1+\tan^2 t \end{vmatrix} = 1 + \tan^2 t \neq 0$$

وبالتالي الشروط محققة والنواة متردية

$$*\ h_1 = \int_a^b h(t)\, b_1(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cot t \cdot \tan t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1\, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$*\ a_{11} = \int_a^b a_1(t)\, b_1(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan t\, dt = \left[\ln(\cos t)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

Subject

الآن نعوض في جملة المعادلات الجبرية الخطية :

$$(1-\lambda a_{11})c_1 = h_1$$

$$\Rightarrow c_1 = \lambda a_{11} c_1 + h_1 \Rightarrow c_1 = \lambda . 0 . c_1 + \frac{\pi}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{\pi}{2}$$

نعوض في صيغة الحل :

$$\Psi(x) = h(x) + \lambda \sum_1^n a_k(x) . c_k$$

$$\Psi(x) = \cot x + \lambda c_1 a_1(x)$$

الحل العام للمعادلة التكاملية :

$$\Psi(x) = \cot x + \lambda \frac{\pi}{2}$$

مثال (4) : بيّن أنه ليس للمعادلة التكاملية : $\Psi(x) = h(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+t)\Psi(t)\, dt$

أي حل عندما $h(x) = x$.

ولها عدد غير منته من الحلول عندما $h(x) = 1$.

<u>الحل</u> : نلاحظ أن النواة متردية وذلك من خلال التحقق أن $k(x,t)$ كمولة تربيعياً

وأن الدوال $a_1(x), \dots, a_n(x)$ وَ $b_1(t), \dots, b_n(t)$ مستقلة خطياً

وكذلك ملاحظة أن النواة تكتب بالشكل $k(x,t) = \sum_1^n a_k(x) . b_k(t)$

$$k(x,t) = \sin(x+t) = \sin x . \cos t + \cos x . \sin t$$

* $a_1(x) = \sin x \quad , \quad a_2(x) = \cos x$ $\qquad$ * $b_1(t) = \cos t \quad , \quad b_2(t) = \sin t$

$$* \; a_{11} = \int_a^b a_1(t) . b_1(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin t . \cos t\, dt = 0 = a_{22}$$

((تحقق من خلال حساب a_{22}))

$$* \; a_{12} = \int_a^b a_1(t) . b_2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \sin t . \sin t\, dt = \pi = a_{21}$$

((تحقق من خلال حساب a_{21}))

* $h_1 = \int_a^b h(t) \cdot b_1(t)\, dt = \int_0^{2\pi} h(t) \cdot \cos t\, dt$

* $h_2 = \int_a^b h(t) \cdot b_2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} h(t) \cdot \sin t\, dt$

نعوض في جملة المعادلات الجبرية الخطية :

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda a_{11}) c_1 - \lambda a_{12} c_2 &= h_1 \\ -\lambda a_{21} c_1 + (1-\lambda a_{22}) c_2 &= h_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 - \pi\lambda c_2 &= h_1 \\ -\lambda\pi c_1 + c_2 &= h_2 \end{aligned}\right\}$$

نوجد محدد الأمثال $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda\pi \\ -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1-(\lambda\pi)^2$$

$\Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \mp \frac{1}{\pi}$ وهي القيم المميزة

وبالتالي فإن للمعادلة التكاملية المفروضة عدداً غير منته من الحلول أو ليس لها أي حل

وذلك حسب ما تكون الشروط (*) «شرط التعامد» محققة أو غير محققة.

شرط التعامد : $\int_a^b \varphi^{(m)}(t) \cdot h(t)\, dt = 0$

إن $\varphi^{(m)}$ تشكل قاعدة لفضاء الحلول للمعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة للمنقول المعادلة التكاملية المفروضة.

هنا نلاحظ أن النواة $k(x,t)$ متناظرة بالنسبة لـ x, t « $\sin(x+t) = \sin(t+x)$ »

إذاً فالقيم المميزة للنواة $k(t,x)$ هي نفسها القيم المميزة للنواة $k(x,t)$

في المعادلة المتجانسة $h(x) = 0 \Rightarrow$
$$\left.\begin{aligned} c_1 - \lambda\pi c_2 &= 0 \\ -\lambda\pi c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$* \lambda_1 = \frac{1}{\pi} \Rightarrow \begin{cases} c_1 - \frac{1}{\pi}\cdot\pi c_2 = 0 \Rightarrow c_1 - c_2 = 0 \\ \frac{-1}{\pi}\cdot\pi c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow -c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2$$

نعتبر $c_1 = \rho$ ثابت كيفي . نعوض في جملة المعادلات الجبرية المتجانسة

وهذا يعني أنه بعد فضاء الحلول يساوي 1 .

إذاً : $\varphi^{(1)}(t) = \rho(\cos t + \sin t)$

نعوض في (*) شرط التعامد :

$$\int_0^{2\pi} \rho(\cos t + \sin t)\cdot h(t)\, dt = 0$$

$$\rho\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)\cdot h(t)\, dt = 0$$

نقسم على ρ حيث $\rho \neq 0$:

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)\cdot h(t)\, dt = 0$$

1. عندما $h(x) = x$ فإنه :

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)\, t\, dt = 0$$

$$-2\pi = 0$$

وهذا مستحيل . (شرط التعامد غير محقق) وبالتالي

ليس للمعادلة التكاملية أي حل .

2. عندما $h(x) = 1$ فإنه :

$$\int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t)\, dt = 0$$

$$0 = 0$$

شرط التعامد محقق وبالتالي للمعادلة عدد غير منتهٍ من الحلول .

إذا أردنا الوصول إلى هذه الحلول علينا ملاحظة أنه :

$$* h_1 = \int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0 \qquad * h_2 = \int_0^{2\pi} \sin t\, dt = 0$$

نعوض في جملة المعادلات الجبرية غير المتجانسة (هنا نشرط هي المتجانسة لأنه $h_1 = h_2 = 0$)

نحصل على $c_1 = c_2$ وبالتالي:

$$\Psi(x) = h(x) + c_1 a_1(x) + c_2 a_2(x)$$

حيث $h(x)$: حل خاص للمعادلة غير المتجانسة

$c_1 a_1(x) + c_2 a_2(x)$: حل عام للمعادلة المتجانسة الموافقة.

$$\Psi(x) = 1 + c_1 (\cos x + \sin x)$$

وهو يمثل الحل العام للمعادلة التكاملية غير المتجانسة.

مثال (5): باستخدام النواة المتردية حل المعادلة:

$$\Psi(x) + 6 \int_0^1 (x^2 - 2xt) \Psi(t)\, dt = 0$$

<u>الحل</u>: نلاحظ أنّ النواة متردية «تحقق»

$* \; a_1(x) = x^2 \quad , \quad a_2(x) = -2x \qquad * \; b_1(t) = 1 \quad , \quad b_2(t) = t$

$$* \; a_{11} = \int_a^b a_1(t) \cdot b_1(t)\, dt = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$$

$$* \; a_{12} = \int_a^b a_1(t) \cdot b_2(t)\, dt = \int_0^1 t^2 \cdot t\, dt = \frac{1}{4}$$

$$* \; a_{21} = \int_a^b a_2(t) \cdot b_1(t)\, dt = \int_0^1 -2t\, dt = -1$$

$$* \; a_{22} = \int_a^b a_2(t) \cdot b_2(t)\, dt = \int_0^1 -2t \cdot t\, dt = \frac{-2}{3}$$

Subject

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{3} & \lambda \\ -\frac{\lambda}{4} & 1+\frac{2\lambda}{3} \end{vmatrix} = (\lambda+6)^2$$

$$\Delta(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -6$$

إن λ قيمة مميزة بالفعل لأن قيمتها تطابق القيمة المعطاة لـ λ في المعادلة -6

نعوض عن λ بقيمتها في المعادلات الجبرية :

$$\left.\begin{aligned} 3c_1 - 6c_2 &= 0 \\ 3c_1 - 6c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c_1 = 2c_2$$

نضع $c_2 = \beta$ ثابت كيفي

$$\vec{c} = (c_1, c_2) = (2\beta, \beta) = \beta(2,1)$$

أي أن فضاء الحل يتكون من متجه واحد هو $(2,1)$

وبالتالي نجد الحل المطلوب :

$$\Psi(x) = 2\beta(x^2 - x)$$
